Jassy Egyetemi Könyvtár
1903
F 1812
1975

# BULETINUL
## POLITEHNICII „GH. ASACHI"
## DIN IAŞI

# BULLETIN
## DE
## L'ECOLE POLYTECHNIQUE
## DE JASSY

## Tome 1

(Fasc. 2. Juillet à Décembre 1946)

Editeur — POLITEHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi —
— L'École Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1946

J/1.
1/46-2.

Le présent *Bulletin* se compose des articles originaux de Mathématique, Physique, Chimie, Sciences naturelles et Technique pas encore publiés *in extenso* dans d'autres revues scientifiques.

Le Comité de Rédaction se propose de faire publier chaque année deux fascicules du *Bulletin* d'environ 160 pages chacun.

Les auteurs assument toute responsabilité en ce que regarde les articles publiés.

Les manuscrits, d'un style concis et correct, doivent être rédigés en français et dactylographiés. Le *Bulletin* publie aussi les articles des auteurs de l'étranger rédigés en anglais, en espagnol, en italien et en allemand. L'ordre de leur publication correspond en principe à la classification décimale internationale. Selon les possibilités, chaque auteur reçoit gratuitement au moins 50 tirages à part. Les prix des clichés sont à la charge des auteurs.

---

## COMITÉ DE RÉDACTION

**Prof. Dr. Ing. Gh. Alexa**
**Prof. Dr. Al. Cişman**
**Prof. Dr. D. I. Mangeron**
**Prof. Ing. Dr. César Parteni**
**Prof. Dr. Şt. Popesco**

---

## AVIS

Toutes les communications relatives à la rédaction et à l'administration du *Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy* (envoi des manuscrits, abonnements, échanges, services des numéros, etc.) doivent être adressées à :

**Séminaire Mathématique de**
**L'Ecole Polytechnique de Jassy,**
**Comité de Rédaction du «Bulletin»**
**Jassy – Iaşi**
**(Roumanie)**

Prix de l'abonnement pour un an (2 fascicules) à partir du 1-er janvier 1947 :

Etranger. Tarif international : 20 frs. suises ; le fascicule : 10 frs. suisses.
Abonamentul anual : 50.000 lei, o fascicolă 30.000 lei.
Abonamentul pentru autorităţi : 200.000 lei.
Abonamentele se achită pînă la 1 Aprilie 1947.

---

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEXANDRU A. ŢEREK, STR. MĂRZESCU 9, – IAŞI
PRINTED IN ROUMANIA

# BULLETIN
# DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE JASSY

**Tome 1**

Fasc. 1 (Janvier à Juin 1946)
et
Fasc. 2 (Juillet à Décembre 1946)

Editeur — POLITEHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi —
— L'École Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1946

Copyright by Politehnica „Gh. Asachi" din Iaşi.
Nr. Agrementului Comisiei Aliate de Control din România 763 din 30.5.1946.
Nr. aprobării apariţiei Buletinului 663 din 1.6.1946.

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEXANDRU A. ŢEREK, STR. MĂRZESCU 9, - IAŞI
PRINTED IN ROUMANIA

1989

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóirattár
4185

# INDEX DU TOME I
## DU
## BULLETIN DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE JASSY
## - 1946 -

## I. Index des Auteurs.


| | | Page |
|---|---|---|
| *Gérard d'Albon*<br>(Dr. Ing., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Contribution à l'étude de la récupération de l'énergie de freinage dans la traction électrique à courant continu | 159 |
| *C. P. Bogdan*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Univ. Jassy) | Sur l'enveloppe des familles planes de coniques | 289 |
| *C. P. Bogdan*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Univ. Jassy) | Sur les familles de coniques de l'espace ordinaire | 292 |
| *Emil Boldur*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Timişoara) | Dentologie du lièvre | 344 |
| *Mihai P. Botez.*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Contribution dans le problème de l'intersection topographique inverse | 170 |
| *Mihail St. Botez*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur une surface cerclée particulière | 234 |
| „ | (Voir : Comptes rendus des livres reçus) | 399 |
| *N. V. Botan &*<br>(Ing., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy)<br>*E. Gh. Scodigor* | Contribution à l'étude des injecteurs à l'eau, adoptés aux carburateurs du type Ensein | 185 |
| *N. V. Botan &*<br>(Ing., Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy)<br>*César Parteni Antoni* | (Voir : César Parteni Antoni) | 352 |
| *N. Calinicenco &*<br>(Dr. Chef de travaux à l'Univ. Jassy)<br>*Virgiliu G. Gheorghiu* | (Voir : Virgiliu Gheorghiu) | 314 |
| *N. Calistru &*<br>(Ing., Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy)<br>*I. N. Ciochină* | (Voir : I. Ciochină) | 343 |
| *T. I. Câmpan* | (Voir : Comptes rendus des livres reçus) | 405 |
| „ | „ | 406 |

| | | Page |
|---|---|---|
| *I. N. Ciochină* (Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique | 72 |
| ,, | Sur la variation du volume des éléments participants dans une réaction chimique | 325 |
| *I. N. Ciochină & C. Calistru* | Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique | 334 |
| *Al. C. Climescu* (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur les quasicycles | 5 |
| ,, | Sur l'équation fonctionnelle de l'associativité | 211 |
| ,, | Sur les espaces à topologie transitive d'ordre n. | 259 |
| *Vasile Corlăteanu &* (Ing., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) | | |
| *César Parteni Antoni* | (Voir : César Parteni Antoni) | 33 |
| *Ion Creangă* (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Les droites „C" de correspondance | 24 |
| ,, | (Voir : Comptes rendus des livres reçus) | 343 |
| *Gaetano Fichera* (Dr., Prof. à l'Inst. appl. calcul. Rome) | Sul problema di *Dini-Neumann* nel piano | 281 |
| *Gh. Gheorghieo* (Dr., Chargé de cours à l'Univ. Jassy) | Sur le vecteur aréolaire d'une courbe gauche | 32 |
| ,, | Sur certaines courbes dérivées d'une courbe gauche et applications | 225 |
| *Virgiliu G. Gheorghiu &* (Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | | |
| *Nicolae Calinicenco* | Sur les correlations entre le $P_H$, la salininité et la concentration de l'oxigène dissout dans l'eau de la mer noir | 314 |
| *Adolf Haimovici* (Dr., Chef de travaux à l'Univ. Jassy) | Sur une famille de surfaces généralisant les quadriques de révolution | 46 |
| ,, | Sur une certaine déformation des congruences de sphères | 238 |
| *Ion Irimescu* (Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy) | Calculs topographiques à la machine de calcul sans levier | 309 |
| *D. I. Mangeron* (Dr., Prof. à l'Ec Polyt. Jassy) | Mécanique non-linéaire. Sur les systèmes oscillatoires non linéaires | 62 |
| ,, | Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur | 295 |
| ,, | Notes de mécanique rationnelle. Remarques sur le problème généralisant celui de la cloche et son battant | 304 |
| ,, | (Voir : Comptes rendus des livres reçus) | 401 |
| ,, | ,, | 402 |
| ,, | ,, | 404 |
| *O. Mayer* (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy) | Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions de variable complexe | 274 |

| | | Page |
|---|---|---|
| *Valeriu I. Moga &* (Dr., Assistant à l'Univ. Bucarest) | | |
| *Fluor D. Rădulescu* | (Voir : Fluor D. Rădulescu) | 93 |
| *A. Myller* (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy) | Equations itérales linéaires du second ordre à coefficients constants | 270 |
| *Miron Nicolesco* (Dr., Prof. à l'Univ. Bucarest) | Remarque sur le potentiel newtonien | 256 |
| *César Parteni Antoni &* (Ing. Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | | |
| *Vasile Corlăţeanu* | L'influence de la variation de l'entrefer sur le fonctionnement d'un moteur d'induction polyphasé | 135 |
| *César Parteni Antoni & N. V. Boţan* | La théorie du quadripôle appliquée au moteur d'induction en cascade avec un compensateur de phase | 352 |
| *Ilie Popa* (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy) | Sur „l'aire" des courbes gauches fermées | 15 |
| *St. Popesco* (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur l'amélioration du blé. Recherches et méthodes | 105 |
| " | Sur l'amélioration des courges. Recherches et méthodes | 363 |
| *N. Popinceanu* (Ing., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Contribution à l'échauffement d'une machine à courant continu fonctionnant sous différentes charges | 129 |
| *A. S. Potlog* (Dr., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) | Contribution à l'amélioration du ricin | 98 |
| *Fluor D. Rădulescu &* (Ing. Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | | |
| *Valeriu I. Moga* | Sels complexes du carboxethyle-indandione | 93 |
| *C. Sandu-Ville* (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Contribution à la connaissance des micromycètes des environs de Orăştie, dans le district Hunedoară | 123 |
| " | Contribution à la connaissance des Micromycètes de Moldavie | 384 |
| *E. Gh. Scodigor &* (Ing., Ministère des travaux publics Bucarest) | | |
| *N. V. Boţan* | (Voir : N. V. Boţan) | 185 |
| *Const. Strub* (Ing., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) | Notations pratiques dans le calcul chimique | 67 |
| " | Un artifice de calcul dans l'analyse chimique | 341 |
| *E. Topa* (Dr., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur la présence de laburnum anagyroides medicus en Roumanie | 118 |
| *N. Zamfirescu* (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur le rythme de la croissance chez le blé et sur l'influence des engrais sur ce rythme | 189 |

## II. Index des matières


**A.**

Page

*Anatomie*

*Emil Boldur*
(Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Timişoara) Dentologie du lièvre 344

**B.**

*Biologie végétale*

*St. Popesco*
(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) Sur l'amélioration du blé. Recherches et méthodes 105
" Sur l'amélioration des courges. Recherches et méthodes 363

*A. S. Potlog*
(Dr., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) Contribution à l'amélioration du ricin 98

*N. Zamfirescu*
(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) Sur le rythme de la croissance chez le blé et sur l'influence des engrais sur ce rythme 189

*Botanique et Pathologie végétale*

*C. Sandu-Ville*
(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) Contribution à la connaissance des micromycètes des environs de Orăştie, dans le district Hunedoară 123
" Contribution à la connaissance des Micromycètes de Moldavie 384

*E. Topa*
(Dr., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) Sur la présence de laburnum anagyroides medicus en Roumanie 118

*Bulletin Bibliographique* (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 397

**C.**

*Chimie*

*I. N. Ciochină* Sur la variation du volume des éléments participants dans une réaction chimique 325

*Const. Strub*
(Ing., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) Notations pratiques dans le calcul chimique 67
" Un artifice de calcul dans l'analyse chimique 341

*Fluor D. Rădulescu &*
(Ing. Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)

*Valeriu I. Moga*
(Dr., Assistant à l'Univ. Bucarest) Sels complexes du carboxethyle-indandione 93

*Chimie Physique*

*I. N. Ciochină*
(Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique, I. 72

*I. N. Ciochină &*
*C. Calistru*
(Ing., Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy) Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique, II. 334

*Comptes rendus des livres reçus* 397

*M. Piazzolla Beloch.* – Lezioni de Geometria Analitica con elementi di Geometria Proiettiva. Vol. I, Bologna (1946) (Lithographié) (Prof. Dr. I. C r e a n g ă).

*M. Piazzolla Beloch* – Lezioni di Geometria descrittiva. Vol. I, Bologna (1946) (Lithographié) (Prof. Dr. Mihail Şt. Botez);

*Charles Platrier.* – Initiation aux Mécaniques ondulatoires. Paris (1945). Act. sci. & industr. (Prof. Dr. D. I. Mangeron);

*Charles Platrier.* – Cours de Mécanique des milieux continus déformables. Théorie de l'élasticité isothermique. Paris (1944–1945) (Lithographié) (Prof. Dr. D. I. Mangeron);

*Charles Platrier.* – Initiation aux Mécaniques relativistes. Paris (1944) (Lithographié) (Prof. Dr. D. I. Mangeron);

*V. Rubbo.* – Progetti di Turbine a Vapore. Milano-Varese (1946) (Prof. Dr. T. I. Câmpan).

*V. Rubbo* & *M. Speluzzi.* – Lezioni di Costruzione dei Motori Termici e Idraulici. Milano-Varese. (1946), (Prof. Dr. T. I. Câmpan).

## M.

## *Mathématiques*


| | | Page |
|---|---|---|
| *C. P. Bogdan* | | |
| (Dr., Maître de conf. à l'Univ. Jassy) | Sur l'enveloppe des familles planes de coniques | 289 |
| „ | Sur les familles de coniques de l'espace ordinaire | 292 |
| *Mihail Şt. Botez* | | |
| (Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur une surface cerclée particulière | 234 |
| „ | (Voir: Comptes rendus des livres reçus) | 399 |
| *Al. C. Climescu* | | |
| (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur les quasicycles | 5 |
| „ | Sur l'équation fonctionnelle de l'associativité | 211 |
| „ | Sur les espaces à topologie transitive d'ordre n. | 259 |
| *Ion Creangă* | | |
| (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Les droites „C" de correspondance | 24 |
| „ | (Voir: Comptes rendus des livres reçus) | 397 |
| *Gaetano Fichera* | | |
| (Dr., Prof. à l'Inst. appl. calcul. Rome) | Sul problema di *Dini-Neumann* nel piano | 281 |
| *Gh. Gheorghieo* | | |
| (Dr., Chargé de cours à l'Univ. Jassy) | Sur le vecteur aréolaire d'une courbe gauche | 32 |
| „ | Sur certaines courbes dérivées d'une courbe gauche et applications | 225 |
| *Adolf Haimovici* | | |
| (Dr., Chef de travaux à l'Univ. Jassy) | Sur une famille de surfaces généralisant les quadriques de révolution | 46 |
| „ | Sur une certaine déformation des congruences de sphères | 238 |
| *D. I. Mangeron* (Dr., Prof. l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur | 295 |
| *O. Mayer* (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy) | Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions de variable complexe | 274 |
| *A. Myller* (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy) | Equations itérales linéaires du second ordre à coefficients constants | 270 |
| *Miron Nicolesco* (Dr., Prof. à l'Univ. Bucarest) | Remarque sur le potentiel newtonien | 256 |

| | | Page |
|---|---|---|
| *Ilie Popa* (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy) | Sur „l'aire" des courbes gauches fermées | 15 |
| *Mathématiques appliquées* | (Voir : Topographie) | |
| *Mécanique* | | |
| *D. I. Mangeron* (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Mécanique non-linéaire. Sur les systèmes oscillatoires non linéaires | 62 |
| „ | Notes de mécanique rationnelle Remarques sur le problème généralisant celui de la cloche et son battant | 304 |
| „ | (Voir : Comptes rendus des livres reçus) | 401 |
| „ | „ | 402 |
| „ | „ | 404 |
| *Machines électriques* | | |
| *César Parteni Antoni &* (Ing., Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | | |
| *Vasile Corlăteanu* (Ing., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) | L'influence de la variation de l'entrefer sur le fonctionnement d'un moteur d'induction polyphasé | 135 |
| *César Parteni Antoni & N. V. Botan* (Ing., Chef de travaux à l'Ec. Polyt. Jassy) | La théorie du quadripôle appliquée au moteur d'induction en cascade avec un compensateur de phase | 352 |
| *N. Popinceanu* (Ing., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Contribution à l'échauffement d'une machine à courant continu fonctionnant sous différentes charges | 129 |
| *Moteurs à explosion* | | |
| *N. V. Botan &* (Ing., Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy) | | |
| *E. Gh. Scodigor* (Ing., Ministère des travaux publics Bucarest) | Contribution à l'étude des injecteurs à l'eau, adoptés aux carburateurs du type Ensein | 185 |
| **P.** | | |
| *Physique* | | |
| *Virgiliu G. Gheorghiu &* (Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | | |
| *Nicolae Calinicenco* (Dr., Chef de travaux à l'Univ. Jassy) | Sur les correlations entre le $P_H$, la salininité et la concentration de l'oxigène dissout dans l'eau de la mer noir | 314 |
| **T.** | | |
| *Technique* | (Voir : Machines électriques, Moteurs à explosion et Traction électrique) | |
| *Topographie* | | |
| *Mihai P. Botez.* (Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Contribution dans le problème de l'intersection topographique inverse | 170 |
| *Ion Irimescu* (Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy) | Calculs topographiques à la machine de calcul sans levier | 309 |
| *Traction électrique* | | |
| *Gérard d'Albon* (Dr Ing, Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Contribution à l'étude de la récupération de l'énergie de freinage dans la traction électrique à courant continu | 159 |

# BULETINUL
## POLITEHNICII „GH. ASACHI"
## DIN IAŞI

# BULLETIN
## DE
## L'ECOLE POLYTECHNIQUE
## DE JASSY

GÉPÉSZMÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

## Tome 1

(Fasc. 2. Juillet à Décembre 1946)

Editeur – POLITEHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi –
– L'École Polytechnique de Jassy –
Iaşi – Jassy
1946

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEXANDRU A. ŢEREK, STR. MĂRZESCU 9, – IAŞI
PRINTED IN ROUMANIA

Copyright by Politehnica „G. Asachi" din Iaşi

Nr. Agrementului Comisiei Aliate de Control din România 763 din 30. 5. 1946.

Nr. Aprobării apariţiei Buletinului 663 din 1. 6. 1946.

**Buletinul Politehnicii „Gh. Asachi" din Iaşi**
**Bulletin de l'École Polytechnique de Jassy**
**Tome I. Fasc. 2. (Juillet à Décembre 1946)**



# SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE L'ASSOCIATIVITÉ

par
**AL. C. CLIMESCU**

1. L'étude des ensembles à composition (ou multiplication) associative peut être abordée en se plaçant à deux points de vue différents :

1⁰ Le point de vue des relations de structure qui revient en somme à l'étude des relations entre l'ensemble donné et certains sousensembles privilégiés.

Ce point de vue domine actuellement la théorie des groupes (qui sont des systèmes associatifs fort particuliers).

2⁰ Le point de vue constructif selon lequel on cherche à construire des systèmes associatifs, en leur imposant d'ailleurs des conditions supplémentaires plus ou moins restrictives ; par ex. le problème du mot *(Wortproblem)* pour les groupes abéliens ou la formation des groupes quotients ou enfin la théorie des fonctions arithmétiques multiplicatives (v. une bibliographie sommaire placée à la fin de l'article) se rattachent à cet ordre d'idées.

Nous nous plaçons ici au second point de vue et les considérations suivantes tournent autour d'un problème qui peut être formulé dans les termes suivants :

*Un ou plusieurs systèmes associatifs — c'est-à-dire à composition associative — étant donnés, trouver des procédés qui permettent d'en déduire immédiatement d'autres systèmes associatifs dont on précisera aussi l'ensemble de définition.*

Certains cas particuliers de ce problème ont été déjà traités par Dickson (9) et Bell (7).

Nous laisserons complètement de côté les propriétés de structure, bien que certains des procédés que nous donnons ci-dessous y impliquent de telles propriétés.

2. Pour la composition nous emploierons indifféremment et selon les circonstances soit la notation algébrique habituelle, et alors l'asso ciativité se traduit par l'égalité

$$a(bc) = (ab)c, \qquad (a \langle E, \langle b\, E, c \langle E)$$

ou bien la notation fonctionnelle, l'associativité s'exprimant par l'égalité

$$f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z).$$

Bien entendu la fonction $f(x, y)$ est définie sur le carré $E \times E$ (c'est—à—dire sur le produit cartésien de l'ensemble $E$ avec lui-même) et prend des valeurs de $E$.

La notation algébrique est surtout utile si l'on fait abstraction de la puissance de $E$ et la notation fonctionnelle est surtout utile si $E$ a la puissance du continu (par ex. $E$ = intervalle réel ou domaine dans le plan de *Gauss*), ou même si $E$ est dénombrable. Interprétée de cette manière toute fonction arithmétique multiplicative normale définit un système associatif dénombrable. Il suffit de numéroter les éléments et de poser

$$a_i \, a_j = a_{f(i,j)} = a_{f(i) f(j)}.$$

3. Deux équations plus simples jouent un certain rôle dans l'étude de l'équation de l'associativité. Ces deux équations sont :

$$\text{I. } f(f(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \text{II. } f(fx)) = f(x)$$

et nous allons les résoudre complètement.

I. Supposons que $f(a) = b$ ; on en déduit $f(b) = a$. Si $f(a) = a$ l'équation est satisfaite d'elle-même.

Nous démontrerons maintenant que si l'on se borne à chercher les solutions uniformes, $f(x)$ est univalente sur l'ensemble où elle est définie. Supposons qu'on ait simultanément $f(a) = c$ et $f(b) = c$ ; alors les deux égalités $f(c) = a$ et $f(c) = b$ doivent avoir lieu à la fois, ce qui est impossible pour une fonction uniforme, d'où la conclusion annoncée.

Appelons $a$ valeur stationnaire si $f(a) = a$. Alors nous pouvons construire une solution de la manière suivante :

Choisissons arbitrairement les valeurs stationnaires et partageons les autres valeurs en couples $(a, b)$ en définissant $f(a)$ et $f(b)$ par les égalités $f(a) = b$, $f(b) = a$.

Il est clair que par ce procédé on obtient toutes les solutions, mais si l'on se borne à l'ensemble réel quelques solutions élémentaires s'aperçoivent immédiatement :

$$f(x) = x, \; -x, \; a - x, \; \sqrt[m]{a - x^m}, \; \frac{ax + b}{cx - a}.$$

Nous rappelons ici un théorème bien connu, que nous enonçons comme.

Lemme. Soient $u(x), v(x), w(x)$ trois fonctions définies sur un ensemble $E$ et prenant des valeurs de $E$. Alors

$$u[v(w)] = u(v[w])$$

(la composition fonctionnelle est associative).

A l'aide de ce lemme, d'une solution donnée on en déduit d'autres, grâce au théorème suivant :

Si $u(x)$ et $u^{-1}(x)$ sont définies et uniformes et si $f(x)$ est une solution de l'équation, $u^{-1} f u(x)$ en est une autre.

En effet $u^{-1} f u (u^{-1} f u) = u^{-1} f (u u^{-1}) f u = u^{-1} f f u = u^{-1} u = x$.

Exemple : $f(x) = 1 - x$, $u(x) = e^x$, $u^{-1}(x) = \log x$, donc $\log(1 - e^x)$ sera une nouvelle solution.

II. Soit $f(a) = b$ donc $f(f(a)) = f(a) = f(b) = b$, donc toute valeur prise par $f(x)$ est stationnaire. Pour construire une solution on doit donc procéder comme il suit :

Choisissons arbitrairement les valeurs stationnaires $a$ ; si $b$ est un élément non-stationnaire, on pose $f(b) = a$, où $a$ est une valeur stationnaire quelconque. Il est évident que l'on obtient ainsi n'importe laquelle des solutions uniformes.

Supposons par ex. que l'ensemble est celui des nombres réels $\geq 0$ et l'ensemble des valeurs stationnaires est l'ensemble des entiers ; quelque soit $x$, on doit poser $f(x) = n$. Une solution particulière bien connue est $f(x) = E(x)$.

4.-a) Soit $K$ un ensemble quelconque et $E$ l'ensemble de tous les sousensembles de $K$. Soit $a \langle E, b \langle E$, et posons $(ab) = a + b$, où $a + b$ est l'ensemble somme des éléments $a, b$. Des propriétés bien connues des sommes d'ensembles il en résulte que $E$ devient un système associatif, et la même chose arrive si $(ab) = ab$, où $ab$ est le produit des ensembles $a, b$.

Exemple. Soit $x = O$, $y = (a)$, $z = (b)$, $t = (a,b)$. Selon les deux définitions on obtient les systèmes associatifs

| | $x$ | $y$ | $z$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $t$ |
| $y$ | $y$ | $y$ | $t$ | $t$ |
| $z$ | $z$ | $t$ | $z$ | $t$ |
| $t$ | $t$ | $t$ | $t$ | $t$ |

| | $x$ | $y$ | $z$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| $z$ | $x$ | $x$ | $z$ | $z$ |
| $t$ | $x$ | $y$ | $z$ | $t$ |

b). Soit $E$ un ensemble donné, $S$ l'ensemble des suites au plus dénombrables d'éléments de $E$ et $f(x, y)$ une solution sur $E$ de l'équation de l'associativité. Si nous posons

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)(y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots) = (f(x_1, y_1), \ldots, f(x_n, y_n), \ldots)$$

on obtient une solution sur $S$.

En effet

$$\mathcal{X}(YZ) = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)(f(y_1, z_1), \ldots, f(y_n, z_n), \ldots) =$$
$$(f(x_1, f(y_1, z_1)), \ldots, f(x_n, f(y_n, z_n)), \ldots)$$

et

$$(\mathcal{X}Y)Z = (f(x_1, y_1), \ldots, f(x_n, y_n), \ldots)(z_1, \ldots, z_n, \ldots) =$$
$$= (f(f(x_1, y_1), z_1), \ldots, f(f(x_n, y_n), z_n), \ldots)$$

donc $\mathcal{X}(YZ) = (\mathcal{X}Y)Z$.

Supposons par ex. que $E$ soit dénombrable et $S$ l'ensemble des suites dénombrables de $E$. $S$ peut être mis en correspondance biunivoque avec l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ (par ex. à l'aide des fractions continues) et de toute solution définie sur $E$ on obtient une solution définie sur le carré

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

5. Cherchons les solutions de la forme

$$f(x, y) = u(x).$$

Alors $f(x, f(y, z)) = f(x, u(y)) = u(x)$ et $f(f(x, y), z) = f(u(x), z) = u(u(x))$ et on doit avoir $u(x) = u(u(x))$ et $u(x)$ est une solution quelconque de l'équation II du § 3.

6. Nous démontrerons maintenant quatre théorèmes qui permettent de déduire d'une solution donnée une infinité d'autres définies sur le même ensemble.

Théorème I. *Si $f(x,y)$ est une solution définie sur $E \times E$ et $u(x)$ est définie sur $E$, y prend des valeurs $\langle E$ et satisfait à l'équation $u(u(x)) = x$, la fonction $uf(u(x), u(y))$ est une solution de l'équation de l'associativité, sur $E \times E$.*

Posons $uf(u(x), u(y)) = v(x, y)$. On a

$$v(x, v(y, z)) = uf(u(x), uuf(u(y), u(z))) = uf(u(x), f(u(y), u(z)))$$
$$v(v(x, y), z) = uf(uuf(u(x), u(y)), u(z)) = uf(f(u(x), u(y)), u(z))$$

et donc $v(x, v(y, z)) = v(v(x, y), z)$.

Exemples. 1°. Soit $E$ l'ensemble réel sauf $0$, $f(x, y) = x + y + a$, $u(x) = \frac{1}{x}$; alors

$$v(x, y) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + a} = \frac{xy}{axy + x + y}$$

2°. Soit $E$ l'ensemble des nombres réels $< 0$ et $u(x) = log(1 - e^x)$

$$f(u(x), u(y)) = log(1 - e^x) + log(1 - e^y) = log(1 - e^x)(1 - e^y)$$

donc

$$v(x,y) = log[1 - (1 - e^x)(1 - e^y)] = log(e^x + e^y - e^{x+y}).$$

Théorème II. *Si $f(x, y)$ est une solution définie sur $E \times E$ et si $u(x)$ est définie sur $E$, prend des valeurs $\langle E$ et est univalente, la fonction*

$$v(x, y) = u^{-1} f(u(x), u(y))$$

*est une solution sur $E \times E$.*

$u(x)$ étant univalente, $u^{-1}(x)$ est uniforme, donc $v(x, y)$ est parfaitement définie et

$v(x, v(y,z)) = u^{-1} f(u(x), uu^{-1} f(u(y),u(z))) = u^{-1} f(u(x),f(u(y),u(z)))$
$v(v(x,y) z) = u^{-1} f(uu^{-1} f(u(x), u(y)), u(z)) = u^{-1} f(f(u(x), u(y)),u(z))$

et la démonstration s'achève comme précédemment.

Exemples. 1° Soit $E$ l'ensemble des nombres $>o$,

$$f(x, y) = x + y, u(x) = \log x.$$

Alors

$$v(x, y) = e^{\log x + \log y} = x y.$$

2° Soit $E$ le même ensemble et $f(x, y) = x + y + a^2$, $u(x) = x^2$, $u^{-1}(x) = \sqrt{x}$, *donc* $v(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$.

3° On obtient encore sans peine, en prenant pour $E$ un ensemble convenable de nombres réels, les solutions

$$\frac{x y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad e^{\log x \log y}, \quad e^{\sqrt{(\log x)^2 + (\log y)^2}}$$

$$\frac{(m n^2 - 2 n t l) x y + l^2 t (x + y) - m l^2}{- n^2 t x y + m n^2 (x + y) + l^2 t - 2 m n l},$$

$$\frac{(m n^2 + l t^2) x y - m l (n + t)(x + y) + m l (m + l)}{n t (n + t) x y - n t (m + l)(x + y) + m^2 n + l^2 t}$$

Ces deux derniers exemples ont été signalés par Dickson (9) comme généralisation de deux autres déjà employés par Schrutka dans la Théorie des nombres polygonaux.

Théorème III. *Si $f(x, y)$ est une solution définie sur $E \times E$, la fonction*

$$u(x,y) = f(x, f(a, y))$$

est une solution définie sur $E \times E$.

Il est plus simple d'employer la notation algébrique. On a $x o y = a(a y)$ *et* $x o (y o z) = x o (y (az)) = x (a (y (az)))$, $(x o y) o z = (x (a y)) o z = (x (a y))(a z)$, mais l'opération $x y$ étant associative, la valeur du produit ne dépend que de l'ordre des facteurs, donc

$$x o (y o z) = (x o y) o z.$$

Théorème IV. *Si $f(x, y)$ est une solution définie sur $E \times E$ et si $f(x, y) = f(y, x)$, la fonction*

$$u(x, y) = f(a, f(x, y))$$

*est encore une solution commutative définie sur $E \times E$.*

$$x \circ y = a(xy); \; x \circ (y \circ z) = x \circ (a(yz)) = axayz;$$
$$(x \circ y) \circ z = (a(xy)) \circ z = a^2 xyz,$$

et les deux produits sont égaux grâce à l'associativité et la commutativité de l'opération $xy$. On a d'ailleurs $x \circ y = y \circ x$.

Exemples. $1^0$ $E$ ensemble de nombres réels et

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Alors

$$f(x, f(y, z)) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}}$$

donc

$$F(x, y) = \frac{axy}{\sqrt{a^2(x^2+y^2) + x^2y^2}}$$

où $a$ est une constante quelconque, est encore une solution.

$2^0$. Soit $E$ un ensemble composé des trois éléments $a, b, c$, et $f(x, y)$ définie par la matrice de Cayley

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |

dont on vérifie sans peine l'associativité. Posons

$$x \circ y = x(a\,y), \; x \circ y = x(b\,y).$$

On obtient les nouveaux systèmes associatifs

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $a$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $b$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $b$. |

7. A partir d'une solution, ou de plusieurs, définies sur $E \times E$, on peut aussi construire des solutions sur d'autres ensembles et nous consacrerons ce § à cette question.

Soit $K$ un système associatif et $E$ l'ensemble de ses sousensembles et soit $A \subset E, B \subset E, C \subset E$. Nous définissons $(A\,B)$ comme l'ensemble de

tous les produits de la forme $a\,b, a \langle A, b \langle B$. $A(BC)$ et $(AB)C$ seront respectivement l'ensemble de tous les produits de la forme $a(bc)$ ou $(a\,b)\,c$, ce qui entraîne

$$A(BC) = (AB)C,$$

donc on a obtenu une solution définie sur $E \times E$.

Soit par ex. $K$ le système défini par la matrice

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |

Posons $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = (a, b)$, $x_5 = (a, c)$, $x_6 = (b, c)$, $x_7 = (a, b, c)$. Le système associatif $E$ composé de ces 7 éléments sera défini par la matrice.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_4$ | $x_4$ |
| $x_2$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_2$ | $x_4$ |
| $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
| $x_4$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_4$ |
| $x_5$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_5$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_7$ | $x_7$ |
| $x_6$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_6$ | $x_4$ | $x_7$ | $x_6$ | $x_7$ |
| $x_7$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_7$ | $x_4$ | $x_7$ | $x_7$ | $x_7$ |

Théorème V. Soit $f(x, y)$ définie sur $A \times A$, $F(x, y)$ définie sur $B \times B$. Si $A$ et $B$ sont disjoints, on obtient la solution $u(x, y)$ définie sur $(A + B) \times (A + B)$ en posant :

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= f(x, y) && \text{si} && x \langle A, y \langle A. \\
u(x, y) &= y && \text{si} && x \langle A, y \langle B. \\
u(x, y) &= x && \text{si} && x \langle B, y \langle A. \\
u(x, y) &= F(x, y) && \text{si} && x \langle B, y \langle B.
\end{aligned}$$

Considérons les huit possibilités d'appartenance pour trois éléments

a). $x \langle A, y \langle A, z \langle A$.

$u(x, u(y, z)) = f(x, f(y, z))$, $u(u(x, y), z) = f(f(x, y), z)$, donc l'associativité résulte de l'hypothèse posée pour $f(x, y)$.

b). $x \langle A, y \langle A, z \langle B$.

$u(x, u(y, z)) = u(x, z) = z$ ; $u(u(x, y), z) = u(f(x, y), z) =$ .

c). $x \langle A, y \langle B, z \langle A$.

$u(x, u(y, z)) = u(x, y) = y$ ; $u(u(x, y), z) = u(y, z) = y$.

d). $x \langle A, y \langle B, z \langle B$.

$u(x, u(y, z)) = u(x, F(y, z)) = F(y, z)$ ; $u(u(x, y), z) = u(y, z) = F(y, z)$.

e) $x \langle B, y \langle A, z \langle A.$

$u(x, u(y, z)) = u(x, f(y, z)) = x$ ; $u(u(x, y), z) = u(x, z) = x.$

f). $x \langle B, y \langle A, z \langle B.$

$u(x, u(y, z)) = u(x, z) = F(x, z)$ ; $u(u(x, y), z) = u(x, z) = F(x, z).$

g). $x \langle B, y \langle B, z \langle A.$

$u(x, u(y, z)) = u(x, y) = F(x, y)$ ; $u(u(x, y), z) = u(F(x, y), z) = F(x, y).$

h). $x \langle B, y \langle B, z \langle B.$

$u(x, u(y, z)) = F(x, F(y, z))$ ; $u(u(x, y), z) = F(F(x, y), z)$ et l'associativité résulte de l'hypothèse similaire adoptée pour $F(x, y)$.

Théorème VI. *Soient $f(a, b)$, $F(x, y)$, des solutions définies respectivement sur $A \times A$, $B \times B$, et soit $C = A \times B$ ; soit encore*

$$\alpha = (a, x), \quad \beta = (b, y), \quad \gamma = (f(a, b), F(x, y)).$$

*Si on pose*

$$u(\alpha, \beta) = \gamma$$

*on obtient une solution définie sur $C \times C$.*

En employant la notation algébrique, on a

$$(a, x)(b, y) = (a \circ b, x \, u \, y)$$

ou $\alpha \beta = (a \circ b, x \, u \, y)$.

Soit encore $\gamma = (c, z)$. On a

$$\alpha(\beta\gamma) = (a, x)(b \circ c, y \, u \, z) = (a \circ (b \circ c), x \, u (y \, u \, z)) \text{ et}$$

$(\alpha \beta)\gamma = ((a \circ b) \circ c, (x \, u \, y) \, u \, z)$, donc étant donné les hypothèses,

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

Exemples. 1°. Soit $A$ l'ensemble des nombres réels $> 0$, $f(a, b)$ le produit des nombres $a\,b$, $B$ un ensemble de deux éléments $x, y$, $F(x, y)$ étant définie par le tableau

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ |
| $y$ | $y$ | $x$ |

Par définition nous aurons :

$$(x, a)(x, b) = (x, a\,b)$$
$$(x, a)(y, b) = (y, a\,b)$$
$$(y, a)(x, b) = (y, a\,b)$$
$$(y, a)(y, b) = (x, a\,b).$$

On reconnaît la règle des signes, donc l'ensemble $(x, a)$ est isomorphe à l'ensemble des nombres réels positifs et l'ensemble $(y, a)$ est somorphe à l'ensemble des nombres réels négatifs.

$2^0$. Soit $A$ l'ensemble composé des éléments $(a, b)$ et $f(a, b)$ définie par le tableau

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $a$ | $b$. |

Soit d'autre part $B$ l'ensemble des nombres de l'intervalle $(0, 1)$ fermé à droite, la fonction $F(x, y)$ étant le produit des nombres $x$, $y$. Par définition

$$(a, x)(a, y) = (a, xy)$$
$$(a, x)(b, y) = (b, xy)$$
$$(b, x)(a, y) = (a, xy)$$
$$(b, x)(b, y) = (b, xy)$$

L'ensemble $C$ ayant la puissance du continu on peut établir une correspondance biunivoque avec les points d'un intervalle, en obtenant ainsi une solution définie sur un carré.

Faisons par ex. correspondre à l'élément $(a, x)$ le nombre $x/2$ $(0 < x \leq 1)$ et à l'élément $(b, x)$ le nombre $(x+1)/2$, $(0 < x \leq 1)$; la correspondance est évidemment biunivoque et nous obtenons la solution

$f(x/2, y/2) = xy/2$ pour $0 < x \leq 1$, $0 < y \leq 1$
$f(x/2, (y+1)/2) = (xy+1)/2$ » » »
$f((x+1)/2, y/2) = xy/2$ » » »
$f((x+1)/2, (y+1)/2) = (xy+1)/2$ » » »

c'est-à-dire

$f(x, y) = 2xy$ si $0 < x \leq 1/2$, $0 < y \leq 1/2$
$f(x, y) = x(2y-1) + 1/2$ » $0 < x \leq 1/2$, $1/2 < y \leq 1$
$f(x, y) = (2x-1)y$ » $1/2 < x \leq 1$, $0 < y \leq 1/2$
$f(x, y) = 2xy - x - y + 1$ » $1/2 < x \leq 1$, $1/2 < y \leq 1$.

Soit enfin $F$ un ensemble de fonctions d'une variable, fermé par rapport à la composition (si $u \langle F, v \langle F, u(v) \langle F$). Alors on sait que $F$ est un système associatif (§ 3, lemme). Supposons que $F$ soit l'ensemble des translations $x + n$ ($n$ entier). Établissons la correspondance suivante :

$$x \longrightarrow x_0$$
$$x + n \longrightarrow x_{2n-1} \quad (n \geqslant 1)$$
$$x - p \longrightarrow x_{2p} \quad (n \geqslant 1).$$

On obtient le système associatif dénombrable $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ et

$$f(x_0, x_t) = f(x_t, x_0) = x_t$$

$$f(x_{2n}, x_{2m}) = f(x_{2m}, x_{2n}) = x_{2(m+n)} \qquad (n \geqslant 1, m \geqslant 1)$$

$$f(x_{2n-1}, x_{2m-1}) = f(x_{2m-1}, x_{2n-1}) = x_{2(m+n)-1} \qquad (n \geqslant 1, m \geqslant 1)$$

$$f(x_{2n-1}, x_{2p}) = f(x_{2p}, x_{2n-1}) = \begin{cases} x_{2(n-p)-1} & \text{si } n > p \\ x_0 & \text{„ } n = p \\ x_{2(p-n)} & \text{„ } n < p. \end{cases}$$

8. Soit $A$ un système associatif et $N$ le sousensemble composé des éléments $c$ qu'on peut écrire sous la forme $c = ab$ $(a < A, b < A)$. $N$ est évidemment un soussystème de $A$ et on peut se poser le problème de déterminer $A$ connaissant $N$ (ce qu'on peut aussi appeler prolongement ou immersion de $N$).

Nous allons résoudre complètement cette question en supposant que $N$ est composé de deux éléments, et bien que nous n'employions que le langage de la théorie des fonctions de variables réelles, méthode et résultats restent valables quelques soient la puissance et la nature des éléments de $A$.

Formulé en termes précis notre problème s'énonce comme il suit :

Trouver toutes les fonctions $f(x, y)$ solutions de l'équation de l'associativité, définies dans le carré $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et telles que $f(x, y)$ ne prenne que les valeurs $0$ et $1$.

Etant donné qu'il y a huit systèmes associatifs de deux éléments, il faut traiter chaque cas séparément.

I. $f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = f(1,1) = 0$.

On a $f(0,f(0,x)) = f(f(0,0),x) = f(0,x)$, ce qui implique $f(0,x) = 0$ et on démontre de même qu'on a $f(x,0) = f(1,x) = f(x,1) = 0$. Pour tout autre couple $(x,y)$, $f(x,y)$ peut prendre arbitrairement la valeur $0$ ou $1$ ; en effet

$$f(x,f(y,z)) = \begin{cases} f(x,0) \\ f(x,1) \end{cases} = 0 \qquad f(f(x,y),z) = \begin{cases} f(0,z) \\ f(1,\ ) \end{cases} = 0.$$

II. $f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = 0$ ; $f(1,1) = 1$.

$f(x,f(0,0)) = f(f(x,0),0) = f(x,0)$, donc $f(x,0) = 0$,

$f(0,f(0,x)) = f(f(0,0),x) = f(0,x) = 0$.

Soit $f(1,x) = 0$ si $x < E$, $f(1,x) = 1$ si $x < CE$, $E$ étant un sousensemble arbitraire de l'intervalle et $CE$ son complémentaire. De l'égalité

$$f(1,f(x,y)) = f(f(1,x),y)$$

on en déduit, en faisant toutes les hypothèses possibles :

a). $x<E,\ y<E$
$f(1,f(x,y))=f(f(1,x),y)=f(0,y)=0$, donc $f(x,y)=0$.
b). $x<E,\ y<CE$
$f(1,f(x,y))=f(0,y)=0$, donc $f(x,y)=0$.
c). $x<CE,\ y<E$
$f(1,f(x,y))=f(f(1,x),y)=f(1,y)=0$, donc $f(x,y)=0$.
d). $x<CE,\ y<CE$
$f(1,f(x,y))=f(f(1,x),y)=f(1,y)=1$, donc $f(x,y)=1$.

$f(x,y)$ est maintenant complètement définie et on vérifie sans peine l'associativité.

La marche de la démonstration restant la même, nous nous contenterons d'énoncer les résultats.

III. $f(0,0)=f(0,1)=0$; $f(1,0)=f(1,1)=1$
$f(0,x)=0$, $f(1,x)=1$.
Soit $f(x,0)=0$ si $x<E$, $f(x,0)=1$ si $x<CE$.
a). $x<E, y<E$, $f(x,y)=0$
b). $x<E, y<CE$, $f(x,y)=0$
c). $x<CE<E$, $f(x,y)=1$
d). $x<CE, y<CE$, $f(x,y)=1$.

IV. $f(0,0)=f(1,0)=0$; $f(0,1)=f(1,1)=1$
$f(x,0)=0, f(x,1)=1$
$f(0,x)=f(1,x)=0$ si $x<E$
$f(0,x)=f(1,x)=1$ si $x<CE$.
a). $x<E, y<E$, $f(x,y)=0$
b). $x<E, y<CE$, $f(x,y)=1$
c). $x<CE, y<E$, $f(x,y)=0$
d). $x<CE, y<CE$, $f(x,y)=1$.

V. $f(0,0)=f(1,1)=0$; $f(0,1)=f(1,0)=1$
$f(x,0)=f(0,x)$ si $x<E$
$f(x,0)=f(0,x)$ si $x<CE$
$f(x,1)=f(1,x)=1$ si $x<E$
$f(x,1)=f(1,x)=0$ si $x<CE$.
a). $x<E, y<E$, $f(x,y)=0$
b). $x<E, y<CE$, $f(x,y)=1$
c). $x<CE, y<E$, $f(x,y)=1$
d). $x<CE, y<CE$, $f(x,y)=0$.

VI. $f(0,0)=0$; $f(0,1)=f(1,0)=f(1,1)=1$.
$f(1,x)=f(x,1)=1$
$f(0,x)=f(x,0)=0$ si $x<E$

$f(0,x) = f(x,0) = 1$ si $x < CE$.

a). $x < E, y < E$, $\quad f(x,y) = 0$
b). $x < E, y < CE$, $\quad f(x,y) = 1$
c). $x < CE, y < E$, $\quad f(x,y) = 1$
d). $x < CE, y < CE$, $\quad f(x,y) = 1$.

VII. $f(0,0) = f(1,1) = 1$; $f(0,1) = f(1,0) = 0$.
$f(x,0) = f(0,x) = 0$ si $x < E$
$f(x,0) = f(0,x) = 1$ si $x < CE$
$f(x,1) = f(1,x) = 1$ si $x < E$
$f(x,1) = f(1,x) = 0$ si $x < CE$.

a). $x < E, y < E$, $\quad f(x,y) = 1$
b). $x < E, y < CE$, $\quad f(x,y) = 0$.
c). $x < CE, y < E$, $\quad f(x,y) = 0$
d). $x < CE, y < CE$, $\quad f(x,y) = 1$.

VIII. $f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = f(1,1) = 1$.

$f(0,x) = f(x,0) = f(1,x) = f(x,1) = 1$, pour tous les autres couples $(x,y)$, $f(x,y)$ prenant arbitrairement la valeur $0$ ou $1$.

9. En fin de compte, nous allons traiter aussi, bien qu'incomplètement, le problème du prolongement d'un système dénombrable.

Nous définissons $f(x,y)$ pour tous les couples d'entiers $\geqslant 0$ par l'égalité $f(m,n) = n$ et nous voulons trouver une solution $f(x,y)$ définie pour $x \geqslant 0, y \geqslant 0$, qui ne prenne que des valeurs entières et qui coïncide avec $f(m,n)$ pour tous les couples des entiers.

On doit avoir

$$f(n, f(x,n)) = f(f(n,x), n) = n = f(x,n)$$

et une solution remplissant cette condition nécessaire est donnée par $f(x,y) = f(0,y)$, où l'on choisit arbitrairement la valeur de $f(0,y)$ pour $y$ non-entier.

En effet

$$f(x, f(y,z)) = f(0, f(y,z)) = f(y,z) = f(0,z)$$
$$f(f(x,y), z) = f(0,z),$$

donc $f(x,y)$ est une solution associative.

Mais il y a encore d'autres solutions. Imposons par ex. les conditions suivantes :

1. $f(x,n) = n$, $x \geqslant 0$ arbitraire et $n$ entier arbitraire.
2. $f(0,x) = f(2,x) = \ldots = f(2n,x) = \ldots$ pour tout $x \geqslant 0$.
3. $f(1,x) = f(3,x) = \ldots = f(2n+1,x) = \ldots$ pour tout $x \geqslant 0$.
4. $f(0,x) = 2n$ $\quad f(1,x) = 2p$, pour tout $x$ non-entier.

5. $f(0,x) = 2m+1$ $\quad f(1,x) = 2q+1$ pour tout $x$ non-entier.

a) Soit $f(0,x) = 2n$. Alors

$f(0,f(x,y)) = f(x,y) = f(f(0,x),y) = f(2n,y) = f(0,y)$ donc

$$f(o,x) = 2n \qquad f(x,y) = f(0,y).$$

b) Soit $f(0,x) = 2n+1$. Alors

$f(0,f(x,y)) = f(x,y) = f(f(0,x),y) = f(2n+1,y) = f(1,y)$ donc

$$f(0,x) = 2n+1 \qquad f(x,y) = f(1,y).$$

Nous démontrerons maintenant que $f(x,y)$ est une solution de l'équation de l'associativité, quelque soit le choix des valeurs $f(0,x)$ $f(1,x)$ pour $x$ non-entier, ce choix étant bien entendu fait de manière que les conditions 1-5 soient remplies.

1. Soit $z$ entier. Alors

$f(x,f(y,z)) = f(y,z) = z$ (condition 1) et

$f(f(x,y),z) = z$, parceque $z$ est une valeur entière ; l'associativité est donc vérifiée.

2. Soit $y$ entier. Alors

$f(x,f(y,z)) = f(y,z)$ et

$f(f(x,y),z) = f(y,z)$.

3. Soit $x$ entier, $y$ et $z$ non-entiers. Suppossons d'abord $x = 2n$ ; alors

$f(x,f(y,z)) = f(y,z)$

$f(f(x,y),z) = f(f(0,y),z)$.

Si $f(0,y) = 2p$, $f(f(0,y),z) = f(2p,z) = f(0,z)$, mais dans ce cas nous avons aussi $f(y,z) = f(0,z)$.

Si $f(0,y) = 2p+1$, $f(f(0,y),z) = f(2p+1,z) = f(1,z)$, mais dans ce cas on a aussi $f(y,z) = f(1,z)$.

Soit maintenant $x = 2p+1$, donc $f(x,y) = f(1,y)$. Alors

$f(x,f(y,z)) = f(y,z)$ et $f(f(x,y),\ ) = f(f(1,y),z)$.

Si $f(1,y) = 2q+1$, on a

$f(y,z) = f(1,z)$, $f(2q+1,z) = f(1,z)$, donc

$f(x,f(y,\ )) = f(1,z)$ et $f(f(x,y),z) = f(1,z)$, l'associativité étant ainsi vérifiée.

4. Soient $x$, $y$, $z$, non-entiers.

Supposons que $f(0,x) = 2p$, $f(0,y) = 2q$. Alors

$f(x,y) = f(0,y) = 2q$, $f(y,z) = f(0,z)$ et

$f(x,f(\ ,z)) = f(x,f(0,z)) = f(0,z)$ ; $f(f(x,y),z) = f(2q,z) = f(0,z)$

Soit $f(0,x) = 2p$, $f(0,y) = 2q+1$ ; alors

$f(y,z) = f(1,z)$ ; $f(x,y) = f(0,y) = 2q+1$ ; $f(2q+1,z) = f(1,z)$, donc

$f(x,f(y,z)) = f(f(x,y),z) = f(1,z)$.

Soit $f(0,x) = 2p+1$, $f(0,y) = 2q$. Alors

$f(y,z) = f(0,z)$ ; $f(x,y) = f(1,y) = 2r$ ; $f(2r,z) = f(0,z)$, donc

$$f(x,f(y,z)) = f(f(x,y),z) = f(0,z).$$

Soit enfin $f(0,x) = 2p+1$, $f(0,y) = 2q+1$. Alors

$f(y,z) = f(1,z)$ ; $f(x,y) = f(1,y) = 2n+1$ ; $f(2n+1,z) = f(1,z)$, donc

$$f(x,f(y,z)) = f(f(x,y),z) = f(1,z).$$

L'associativité est ainsi vérifiée pour tous les cas possibles.

## Travaux cités


1. Bell, E. T. – *Extension of Dirichlet multiplication and Dedekind inversion.* Bull. of the American Math. Soc., vol. 28 (1922), p. 111–122.
2. „ – *Euler algebra.* Trans. of. the Amer. Math. Soc. vol. 25 (1923), p. 135–154.
3. „ – *A ray of numerical functions of r arguments.* Bull. of the Amer. Math. Soc. vol. 32 (1926), p. 341–345.
4. „ – *Numerical functions of multipartite integers and compound partitions.* Amer. J. of Math. vol 49 (1927), p. 489–510.
5. „ – *Algebraic Arithmetic.* Colloquium Publications of the American Mathematical Society, vol. 7, New York 1927.
6. „ – *Arithmetical composition and inversion of functions over classes.* Trans. of. the Amer. Math. Soc. vol. 33 (1931), p. 897–933.
7. „ – *A functional equation in arithmetic.* Trans. of the Amer. Math. Soc. vol. 39 (1936), p. 341–344.
8. „ – *Distributivity of associative polynomial compositions.* Annals of Math. vol. 37 (1936), p. 368–373.
9. Dickson, L. E.– *An extension of the theory of numbers by means of correspondences between fields.* Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. 23 (1917), p. 109–111.
10. Lehmer, D. H.– *A new calculus of numerical functions.* Amer. Journal of Math. vol. 53 (1931), p. 843–854.
11. „ – *Arithmetic of double series.* Trans. of the Amer. Math. Soc. vol. 33 (1931), p. 945–957.
12. Vaidyanathaswamy, R.– *The theory of multiplicative arithmetic functions.* Trans. of the Amer. Math. Soc. Vol. 33 (1931), p. 579–622.


*Séminaire Mathématique*
*de l'Ecole Polytechnique*
*de Jassy*

*(Reçu le 30 Juin 1946)*

513

# SUR CERTAINES COURBES DÉRIVÉES D'UNE COURBE GAUCHE ET APPLICATIONS

par

GH. GHEORGHIEV

Dans la première partie, nous établisons des formules au moyen desquelles on peut étudier aisèment les courbes situées sur une surface développable, dont l'arête de rébroussement est donnée; nous présentons ensuite quelques applications à l'étude de l'équitangentielle et de la podaire de certaines familles de courbes. Dans la deuxième partie nous démontrons deux propriétés concernant une surface plus générale que la surface spirale et sa complémentaire.

I. Soit $C$ une courbe tracée sur la développable $D$ d'une courbe, $\Gamma$. Notons par : $\bar{r}, \bar{t}, \bar{n}, \bar{b}, s, \varkappa, \tau$ respectivement le vecteur d'un point $M$ de $\Gamma$, les vecteurs unitaires du trièdre Frenet, l'arc et ses courbures au point $M$. L'équation de la courbe $C$ est :

$$\bar{R} = \bar{r} + x\bar{t} \tag{1}$$

où $x$ est une fonction de $s$. En considérant la courbe $C$ comme la trajectoire d'un point $M_1(\bar{R})$ dans le mouvement déterminé par $\Gamma$ et son trièdre Frenet, la vitesse absolue du point $M_1$ sera :

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \bar{t}(1 + x') + x[\bar{\omega}, \bar{t}] \qquad \text{où : } \bar{\omega} = \varkappa\bar{b} - \tau\bar{t} \tag{2}$$

et cele d'un vecteur unitaire $\bar{a}$ est : $\frac{d\bar{a}}{ds} = \bar{a}' + [\bar{\omega}, \bar{a}]$.

Soit : $\bar{\alpha}(\alpha, \beta, \gamma), \bar{\xi}, (\xi, \eta, \zeta), \bar{\lambda}(\lambda, \mu, \nu), \sigma, \varkappa_1, \tau_1,$

les vecteurs unitaires du trièdre de Frenet l'arc et les courbures au point $M_1$ de la courbe $C$. En utilisant les formules de Frenet, (2) et (3) nous avons :

$$\bar{\alpha}\frac{d\sigma}{ds} = \bar{t}(1 + x') + \varkappa x\bar{n}$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} \bar{\xi}\,\varkappa_1\frac{d\sigma}{ds} &= \bar{t}\,(\alpha' - \varkappa\beta) + \bar{n}\,(\beta' + \varkappa\alpha) - \bar{b}\,\tau\beta \\ \bar{\xi}\,\tau_1\frac{d\sigma}{ds} &= \bar{t}\,(\lambda' - \varkappa\mu) + \bar{n}\,(\mu' + \varkappa\lambda + \tau\mu) + \bar{b}\,(\nu' - \tau\mu) \end{aligned}$$

En multipliant la première par $\bar{\alpha}$ les deux dernières par $\bar{\xi}$, on obtient:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds} &= \alpha\,(1 + x') + \varkappa\, x\,\beta, \\ \varkappa_1\frac{d\sigma}{ds} &= \alpha'\,\xi + \beta'\,\eta + \varkappa\,\nu - \tau\,\lambda, \\ \tau_1\frac{d\sigma}{ds} &= \lambda'\,\xi + \mu'\,\eta + \nu'\,\zeta + \tau\,\alpha. \end{aligned}$$

En notant par $\theta$ l'angle des tangentes et par $\varphi$ celui des binormales de $\Gamma$ et $C$ en $M$ et $M_1$, nous avons :

$$\bar{\alpha}\,(\cos\theta,\ \sin\theta,\ o),\ \bar{\xi}\,(-\sin\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\cos\varphi,\ \sin\varphi),$$
$$\bar{\lambda}\,(\sin\theta\sin\varphi,\ -\cos\theta\sin\varphi,\ \cos\varphi).$$

(où :

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\varkappa\, x}{1 + x'}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\tau\sin\theta}{\theta' + \varkappa}.$$

Alors les relations (4) deviennent :

$$(6)\qquad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\varkappa x}{\sin\theta}, \qquad \varkappa_1\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{\tau\sin\theta}{\sin\varphi}, \qquad \tau_1\frac{d\sigma}{ds} = -\varphi' + \tau\cos\theta.$$

D'où l'on déduit immédiatement : 1. L'angle $\theta$ et $\frac{d\sigma}{ds}$, sont invariantes pendant la déformation – ce qui est évident par considérations intuitives. 2. L'expression : $(\theta' + \varkappa)\frac{ds}{d\sigma}$ représente la courbure de la courbe plane $\bar{C}$ après le développement de $D$ sur un plan. 3. $C$ peut se réduire à une droite seulement si $\Gamma$ est plane. 4. Si $\Gamma$ est une courbe fermée ayant pour périmètre $e$ et $x$ est une fonction périodique ayant la période $e$, alors $C$ est aussi fermée.

En donnant à $x$, $\theta$ ou $\varphi$ des valeurs différentes, on obtient différentes dérivées de la courbe $\Gamma$. Si : a) $x' = 0$ nous avons les équitangentielles de la courbe $\Gamma$, b) $x = -(\bar{r}, \bar{t})$ – c'est la podaire sur la tangente de $\Gamma$ par rapport à l'origine, c) $\theta' = 0$ – ce sont les trajec-

toires isogonales des génératrices de la développable $D$; dans le cas particulier : $\theta = \frac{\pi}{2}$ on obtient les évolventes de la courbe $\Gamma$, d) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – ce sont les géodésiques de la développable $D$.

Si $\mathbf{S}_\Gamma$ est une nappe de l'évolute d'une surface $\Sigma$, alors on appele sa complémentaire la seconde nappe de cette évolute. e) Si $\Gamma$ est géodésique sur une surface $\mathbf{S}_\Gamma$ et $\varrho_g$ est le rayon de courbure géodesique des trajectoires orthogonales de $\Gamma$ sur $\mathbf{S}_\Gamma$, alors : $x = \varrho_g$ donnera la courbe de contact de la développable $D$ avec la surface complémentaire $\mathbf{S}_c$ de la surface $\mathbf{S}_\Gamma$.

En introduisant ces valeurs en (1), (5) et (6) on obtient l'équation de la courbe correspondante, son arc et ses courbures exprimées par les éléments respectives de $\Gamma$ ; elles ont l'avantage de mettre en évidence les expressions qui restent invariantes pendant la déformation de la développable $D$. Elles peuvent remplacer utilement, les calculs laborieux et les formules compliquées données par divers auteurs pour la podaire [voir travaux cités 1], pour l'équitangentielle [2, 3, 4] etc. En ce qui concerne la question «e», nous croyons nouvelle.

*Applications* : 1. Si la courbe $C$ est l'équitangentielle de $\Gamma$ nous avons : $x = a$, les relations (5) et (6) nous donnent :

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{a}{R}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \theta' = \frac{a R'}{R^2 + a^2} \quad \text{où : } R = \frac{1}{\varkappa}$$

D'où : si l'équitangentielle d'une courbe $\Gamma$ et $\Gamma$ elle même ont une des propriétés suivantes : 1. l'équitangentielle de $\Gamma$ est trajectoire isogonale des génératrices de la dévelopable $D$, 2. elle a l'arc proportionnel a celui de $\Gamma$, 3. la courbe $\Gamma$ est un cercle gauche, alors les deux autres seront aussi satisfaites. La tangente de l'angle $\varphi$ est proportionnelle à la torsion de $\Gamma$. On doit remarquer que cette question est étroitement liée à celle des courbes ayant le rapport des courbures «r» constant, courbes introduites et étudiées par M. O. Mayer [5].

Si l'équitangentielle de la courbe $\Gamma$ est aussi géodésique de la dévelopable $D$, alors nous avons encore : $\theta' + \varkappa = 0$, qui, en vertu des relations (7), devient :

$$\frac{1}{R} - \frac{a R'}{R^2 + a^2} = 0$$

d'où il s'en suit immédiatement :

(8) $$R^2 + a^2 = e^{\frac{2s}{a}} + b.$$

C'est l'équation naturelle de la tractrice ordinaire à laquelle se réduit $\Gamma$ après le développement de $D$ sur un plan ; cette tractrice ayant pour asymptote la droite obtenue de la géodésique $C$ par le même développement ; on peut appeler $\Gamma$ la tractrice géodésique.

Si l'équitangentielle est un cercle géodésique sur la développable $D$, nous avons encore la condition : $\varkappa_1 \cos\varphi = b$. En utilisant (5) et (7) cette relation devient :

$$\theta' \cos\theta + \frac{1}{a}\sin\theta = b.$$

dont l'intègrale est : $\sin\theta = ab + c\,e^{-\frac{s}{a}}$.

En tenant compte de (7), on arrive à l'équation naturelle de la tractrice circulaire plane :

$$R = \frac{a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - (a\,b\,e^{\frac{s}{a}} + c)^2}}{a\,b\,e^{\frac{s}{a}} + c}.$$

Pour $b = 0$ on obtient (8).

La notion de tractrice a été étendue pour l'espace encore en d'autre sens ; ainsi, par exemple. O. Hoel [6] appele tractrice circulaire à double courbure la courbe dont l'équitangentielle est un cercle. On obtient les deux équations naturelles de cette courbe, si, outre (7) on impose aussi la condition : $\varkappa_1 = b$, $\tau_1 = 0$. On verifie facilement que ces courbes sont spheriques (Hoel).

2. Si le point $M_1$ se déplace uniformément sur la tangente en $M$, on peut dire que $M_1$ décrit une spirale archimédienne de la courbe $\Gamma$ ; dans le cas particulier, où la vitesse est $-1$, on obtient les évolventes de la courbe $\Gamma$. Les courbes $C$ satisferont la condition : $x = as + b$. Les spirales archimédiennes de la famille de courbes définie par : $\varkappa = \frac{c}{s}$, qu'on peut appele spirales logarithmiques gauches, sont encore des trajectoires isogonales des génératrices de $D$ ; leurs éléments d'arc sont proportionnels à celui de $\Gamma$. Dans le cas particulier de l'hélice cylindrocônique l'angle $\varphi$ est constant ; de (6), il s'en suit immédiatement : la spirale archimédienne de l'hélice cylindrocônique est une courbe de même espèce. Pour ces courbes, la podaire par rapport au sommet

du cône est encore une spirale archimédienne ; en effet, nous avons :

$$\bar{r}^2 = a^2 s^2.$$

D'où : $(\bar{r}, \bar{t}) = a^2 s$. Donc cette podaire est encore une hélice de même espèce. Plus généralement, si les podaires par rapport à l'origine sont aussi des spirales archimédiennes de $\Gamma$, nous avons : $(\bar{r}, \bar{t}) = as + b$ d'où il en résulte : (9) $\bar{r}^2 = as^2 + 2bs + c$,

$$\text{et (10) } (\bar{r}, \bar{n}) = (a-1)R ; (\bar{r}, \bar{b}) = T\left[(1-a)R' - \frac{as+b}{R}\right].$$

En tenant compte de l'identité : $\bar{r}^2 = (\bar{r}, \bar{t})^2 + (\bar{r}, \bar{n})^2 + (\bar{r}, \bar{b})^2$ on obtient :

$$(11)\ as^2 + 2bs + c = (as+b)^2 + (1-a)^2 R^2 + T^2\left[(1-a)R' - \frac{as+b}{R}\right]^2.$$

Cette équation naturelle de la famille $\Gamma$ est équivalente à l'expression semiintrinsèque (9). En particulier, si $a = 1$, la première relation du système (10) se réduit à : $(\bar{r}, \bar{n}) = 0$, c'est a dire, $\Gamma$ sont les géodésiques des cônes ayant le sommet a l'origine. L'équation (11) devient :

$$T : R = c : (s+b)$$

c'est la bien connue équation naturelle des géodésiques d'un cône. D'où : Les spirales archimédiennes des géodésiques d'un cône sont encore des podaires par rapport au sommet. Dans le cas particulier, $a = -1$ une des évolventes de $\Gamma$ coïncide avec la podaire par rapport à l'origine et $\Gamma$ satisfait à l'équation naturelle :

$$2bs + d = 4R^2 + T^2\left(2R' + \frac{s-b}{R}\right)^2.$$

II. Si la configuration formée par $\Gamma$ et une courbe $C$, située sur la développable $D$, est soumise à une déformation par similitude, les deux courbes engendreront les surfaces $\mathbf{S}_\Gamma$ et $\mathbf{S}_c$. La déformation par similitude est caracterisée par une courbe $\Delta$ – le lieu des centres d'homothétie – dont le trièdre principal est invariant pendant la déformation. Les éléments de la déformation, liés à $\Delta$, sont notés par :

$$\bar{\varrho}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, t, \varkappa_2, \tau_2, e^k .$$

Les surfaces $\mathbf{S}_\Gamma$ et $\mathbf{S}_c$ peuvent être representés par la même équation vectorielle :

$$(12) \qquad \bar{R} = \bar{\varrho} + e^k(\bar{r} + x\bar{t}).$$

Pour $x = 0$ on obtient équation de $\mathbf{S}_\Gamma$ : $\bar{R}_0 = \bar{\varrho} + e^k \bar{r}$.

Si $x$ est indépendant de $t$, on déduit de (5) et (6) que la famille $(C)$ qui appartient à $\mathbf{S}_c$ est formée par des courbes semblables. La vitesse absolue d'un point sera donnée par $\frac{d\bar{R}}{dt}$. En projetant ce vecteur sur les arêtes du trièdre Frenet de la courbe $\Gamma$, on a :

$$L\bar{t} + M\bar{n} + N\bar{b} = e^{-k}\frac{d\bar{R}}{dt}.$$

Nous avons montré dans notre thèse (non encore publiée) que ces éléments vérifient les relations :

$$(13)\quad \frac{dL_0}{ds} = M_0 \varkappa + \dot{k}, \quad \frac{dM_0}{ds} = -L_0 \varkappa - N_0 \tau + r, \quad \frac{dN_0}{ds} = M_0 \tau - q,$$

où : $p\bar{t} + q\bar{n} + r\bar{b} = \bar{\omega} = \varkappa_2 \bar{c} - \tau_2 \bar{a}$ est le vecteur de rotation instantanée de la déformation.

Afin que la famille $(\Gamma)$ soit formée des lignes géodésiques sur $\mathbf{S}_\Gamma$ on doit avoir : $\left(\frac{d\bar{R}_0}{dt}, \bar{n}\right) = 0$ c'est à dire : $(14)\ M_0 = 0$

alors (13) deviennent :

$$(15)\quad \frac{dL_0}{ds} = \dot{k}, \qquad L_0 \varkappa + N_0 \tau = r, \qquad \frac{dN_0}{ds} = -q$$

d'où :

$$(16)\quad L_0 = \dot{k}s + u(t), \qquad N_0 = \frac{r}{\tau} - \frac{\varkappa}{\tau}(\dot{k}s + u)$$

Afin que la famille $(C)$ soit située sur la surface complémentaire de $\mathbf{S}_\Gamma$, il suffit d'exprimer que le plan osculateur à $\Gamma$ en $M$ est plan tangent à $\mathbf{S}_c$ en $M_1$ ; alors la vitesse du point $M_1$ sera située dans le plan osculateur de $\Gamma$ en $M$; $M_1$ est le point d'intersection de la droite caractéristique du plan pendant la déformation avec la tangente de $\Gamma$. Ce point sera indéterminé si la caractéristique coïncide avec la tangente, c'est a dire si la géodésique $\Gamma$ est trajectoire d'un point pendant la déformation. En exceptant ce cas, cette condition s'exprime analytiquement par :

$$\left(\frac{d\bar{R}}{dt}, \bar{b}\right) = 0 \qquad \text{ou : } N = 0.$$

Comme : $N = N_0 - xq$ nous avons : $x = \dfrac{N_0}{q}$

En vertu des relations (15) et (16), celle-ci devient :

$$x = \frac{Tr - \frac{T}{R}(\dot{k}s + u)}{q} \tag{17}$$

(14) étant une équation à variables mêlées, elle aura comme solution une, deux ou trois relations lineaires entre $e^{-k}$, $\dot{k}$, $\varkappa_2$, $\tau_2$ - fonctions de $t$. En tenant compte du fait que l'expression $u$ de (16) est une fonction arbitraire de $t$, $x$ sera indépendant de $t$ si : $\varkappa_2$, $\tau_2$, $\dot{\varkappa}$ sont proportionnelles à une fonction arbitraire ; donc : $\varkappa_2 : \tau_2 = \text{const.}$

Ainsi : Pour les déformations par similitude ayant $\Delta$ une hélice quelconque, c'est à dire ayant la direction de l'axe de rotation constante, la surface complémentaire de $\mathbf{S}_\Gamma$ contiendra la famille $(C)$ des courbes semblables, obtenue par la même déformation que la famille des géodésique de $\mathbf{S}_\Gamma$. Dans le cas particulier, de la similitude avec l'axe de rotation fixe, les surfaces $\mathbf{S}_\Gamma$ et $\mathbf{S}_c$ sont des surfaces spirales. Cette proprieté des surfaces spirales a été soupçonnée par M-me F. Câmpan dans sa thèse [7].

Propposons nous de déterminer quelques-uns des éléments de la courbe $C$ quand $\Gamma$, étant géodésique sur $\mathbf{S}_\Gamma$, est une hélice. En dérivant l'expression : $x = N_0 : q$ et en tenant compte de (15), on obtient : $x' + 1 = -\dfrac{N_0 q'}{q^2}$.

De (5) il s'en suit : $\operatorname{tg}\theta = -\varkappa \dfrac{q}{q'}$,

ou :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{q}{p + \frac{\tau}{\varkappa} r} = \frac{(\overline{\omega}, \overline{n})}{\left(\overline{\omega}, \overline{t} + \frac{\tau}{\varkappa}\overline{b}\right)} \tag{18}$$

$\Gamma$ étant une hélice nous avons :

$$\varkappa : \tau = \operatorname{tg}\alpha.$$

En utilisant (18), la seconde relation de (5) nous donne :

$$\operatorname{tg}\varphi . \sin\theta = \operatorname{tg}\alpha. \tag{19}$$

Donc : Quand la famille des géodésiques $\Gamma$ sont des hélices, les

éléments $\theta$, $\varphi$, $\tau_1 : \varkappa_1$ de la courbe $C$ dépendent seulement de l'image sphèrique de ses normales principales, qui est une circonférence, et du pas de l'hélice. Le vecteur unitaire de la binormale de $C$ est :

$$(\bar{t} \sin\theta - \bar{n} \cos\theta) \sin\varphi + \bar{b} \cos\varphi.$$

Son angle $\chi$ avec $\bar{\omega}$ sera donné par :

$$\cos\chi \sqrt{\bar{\omega}^2} = (p \sin\theta - q \cos\theta) \sin\varphi + r \cos\varphi \tag{20}$$

(18) et (19) nous donnent :

$$\frac{\sin\theta}{q} = \frac{\cos\theta}{p + r \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{q^2 + (p + r \operatorname{ctg}\alpha)^2}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{q \operatorname{tg}\varphi}.$$

De (20) il en résulte immédiatement : $\chi = \frac{\pi}{2}$. Donc :

La famille $(C)$ des courbes semblables sur la surface complémentaire de $\mathbf{S}_\Gamma$, sur laquelle $(\Gamma)$, étant des déodésiques, sont des hélices cylindriques, est une famille de courbes planes situées dans des plans parallels à la diréction de l'axe de rotation.

Ce résultat peut être enoncé plus completement (voir notre thèse) de la manière suivante :

Si une hélice cylindrique $\Gamma$ et ses déformées par une similitude ayant la direction de l'axe de rotation fixe, sont des lignes géodésiques sur la surface $\mathbf{S}_\Gamma$ engendrée de cette manière, alors une des évolventes $\mathcal{E}$ de l'hélice $\Gamma$ engendrera la surface évolvente $\Sigma$ sur quelle les courbes de la famille $(\mathcal{E})$ seront des lignes de courbure planes semblables ; la deuxième nappe de l'évolute de $\Sigma$ sera engendrée par une famille $(C)$ de courbes planes situées en des plans parallels avec la direction de l'axe de rotation. Les familles $(\mathcal{E})$ et $(C)$ sont invariantes par la similitude imposée à $(\Gamma)$.

Si la déformation a l'axe de rotation fixe, on obtient une propriété corespondante des surfaces spirales.

Avant de finir, nous indiquons la possibilité de la détérmination des courbures des hélices $(\Gamma)$. En dérivant la deuxième relation de (16) et en tenant compte de (15), on obtient : $q + T'r - a \operatorname{ctg}\alpha = -q$ ou : $(2\bar{n} + T'\bar{b}, \bar{\omega}) = a \operatorname{ctg}\alpha$.

En choisissant $\bar{\omega}$ comme $OZ$ et en exprimant $\bar{n}$ et $\bar{b}$ en fonction de la direction de la tangente à la section droite du cylindre, on arrive immédiatement à l'expression :

$$\frac{dT}{d\psi} = \frac{A+B\cos\psi}{C+D\sin\psi}.$$

Donc la détérmination des courbures de l'héiice se réduit à une quadrature et celle de ses coordonnées à deux.

## Travaux cités


1. Raimondi E.- *Sulle podarie delle curve sghembe.* Giornale di Matematica, LVII (1919), pag. 103-128.
2. Deaux R.- *Sur la courbe équitangentielle d'une courbe gauche.* Mathesis, XLIV (1930), 343-349.
3. Deaux R.- *Lieux associés aux équitangentielles d'une courbe gauche.* Mathesis, XLV, 239-242.
4. Goormaghtigh R.- *Sur les courbes équitangentielles d'une courbe gauche.* Mathesis, XLV, (55-59).
5. Mayer O.- *Etudes sur les courbes gauches I,* Bul. Fac. Ştiinţi. Cernăuţi II (1928), pag. 208.
6. Hoel O.- *La tractrice circulaire à double courbure,* Annaes Acad. Porto XIV (1920), 24-32.
7. Câmpan F.- *Surfaces parallèles et semblables* (Thèse), Bucureşti, 1943.


*Séminaire Mathématique*
*de*
*l'Université de Jassy*

*(Reçu le 30 Juin 1946)*

# SUR UNE SURFACE CERCLÉE PARTICULIÈRE

par

MIHAIL ŞT. BOTEZ

En étudiant la variation du moment d'inertie par rapport aux plans passant par une droite fixe, Mr. M. Ghermanescu [1]), a qui je dois remercier pour ses renseignements, trouve comme représentant cette variation, la surface dont l'équation est la suivante :

$$(1)\quad F(x\ z) = (x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2 + z^2) - [x^2 I(\lambda_1) + y^2 I(\lambda_2)] = 0.$$

Elle est générée de la manière suivante :

On prende dans un plan $P_\lambda$, tous les points $M_\lambda$ tels que $OM_\lambda = I(\lambda)$; ils sont situés sur un cercle $C_\lambda$ de centre $O$ et de rayon $I(\lambda)$ situé dans $P_\lambda$. Lorsque $P_\lambda$ tourne autour de $OZ$, les cercles $C_\lambda$ engendrent la surface (1) nommée par Mr. Ghermanescu *Surface (G) d'inertie.*

Aux propriétés intéressantes établies par Mr. Ghermanescu on peut ajouter les suivantes :

1. Considérons les points $P_i(0, 0, z_i)$ avec $I(\lambda_2) \leq z_i \leq I(\lambda_1)$, en cherchant le plan tangent à la surface en ces points, on observe :

$$(2)\quad \begin{aligned} &\frac{\delta F}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\delta F}{\delta z} = 0 \\ &\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y} = \ldots = 0 \\ &\frac{\delta^3 F}{\delta x^3} = \frac{\delta^3 F}{\delta x^2 \delta y} = \ldots = 0 \end{aligned}$$

et

$$\frac{\delta^4 F}{\delta x^4} \neq 0$$

Donc :

*Les ségments de droite appartenant à la surface sont des ségments quadruples.*

*Par ces ségments passent quatre nappes de la surface.*

2. La surface considérée étant une surface cerclée, prenons deux génératrices circulaires $C$ et $C_1$ infinement voisines, leurs plans se coupent suivant une droite nommée *caractéristique.*

En ce cas *la caractéristique est justement l'axe OZ.*

Donc nous pouvons dire :

*L'axe OZ est la caractéristique de la surface, et des ségments de caractéristique appartient à la surface comme des lignes quadruples.*

3. Si l'on considère l'équation :

$$(3) \qquad (\mathcal{X} - x)\frac{\delta F}{\delta x} + (Y - y)\frac{\delta F}{\delta y} + (Z - z)\frac{\delta F}{\delta z} = 0$$

du plan tangent, qui pour un point quelconque $M_0(x_0, 0, z_0)$ situé sur la génératrice circulaire :

$$x^2_0 + z^2_0 = [I(\lambda_2)]^2$$

après tous les calculs faites, prende la forme :

$$4) \qquad \mathcal{X}x_0 + Z z_0 = I(\lambda_2).$$

C'est à dire ces plans tangents, sont parallèles à l'axe $OY$, donc *perpendiculaires sur le plan de la génératrice circulaire considérée.*

Si nous écrivons l'équation d'une normale à la surface dans un point $M_0(x_0, 0, z_0)$ appartenant à la génératrice circulaire considérée, on obtient:

$$(5) \qquad Z x_0 - \mathcal{X} z_0 = 0.$$

C'est à dire la normale considérée passe par l'origine.

Comme le point $M_0$ est un point courant de la génératrice il s'en suit que toutes les normales à la surface au long de cette génératrice se rencontrent. Donc le lieu de ces points est une ligne de courbure plane de la surface.

On peut montrer de la même manière que le cercle de rayon maximum est lui aussi une ligne de courbure plane de la surface et que les plans tangents au long de cette ligne sont perpendiculaires sur le plan qui la contient.

Nous avons trouvé ainsi deux lignes de courbure plane au long desquelles les plans tangents sont perpendiculaires sur les plans de ces lignes. On peut donc affirmer [2] :

*Les plans qui contient les lignes de courbures corréspondantes aux cercles maximum et minimum de la surface, sont des plans de symétrie.*

Il faut ajouter que les centres de courbure principeaux relatifs à ces deux lignes de courbure circulaires sont *confondus.* Le rayon de courbure principal corréspondant est égal au rayon des sphères qui se raccordent avec la surface au long des lignes de courbure circulaires ).

4. Considérons maintenant la génératrice $C$ et la projection $C'_1$, de la génératrice $C_1$ infiniment voisine, faite sur la plan de $C$. La corde commune entre $C$ et $C'_1$ fut nommée axe radical.

En ce cas : *l'axe radical est parallèle à la caractéristique.*

On sait d'après un théorème de Demartres[4]) que :

Sur une surface cerclée existe sur chaque génératrice deux points ou cette génératrice est tangente à une ligne de courbure de la surface et les deux points sont situés sur la polaire du point où l'axe radical rencontre la caractéristique.

Mais comme l'axe radical rencontre la caractéristique à l'infini dans la diréction de $OZ$, il en résulte que les points respectifs sont contenus dans le plan de $XOY$.

Le lieu de ces points est justement la section faite dans la surface par le plan $z = 0$, c'est à dire la séxtique d'inertie :

$$(x^2 + y^2)^3 - [x^2 I(\lambda_2) + y^2 I(\lambda_1)]^2 = 0. \tag{6}$$

On peut donc affirmer :

*La séxtique d'inertie est une ligne de courbure plane de la surface.*

Si on considère un plan tangent à la surface dans un point quelconque de cette courbe, on obtient l'équation :

$$(X - x)\frac{\delta F}{\delta x} + (Y - y)\frac{\delta F}{\delta y} = 0 \tag{7}$$

donc un plan perpendiculaire sur $XOY$.

D'où résulte que *le plan de la séxtique d'inertie est aussi un plan de symétrie de la surface.*

*REMARQUE*

a) Il est à remarquer que Gauss[5]) a trouvé la suivante courbe :

$$(x^2 + y^2)^3 - k^2\left(\frac{y^2}{B} + \frac{x^2}{A}\right)^2 = 0 \tag{8}$$

qui rappelle la séxtique de Mr. Ghermanescu.

Si nous exprimons les deux courbes (6) et (8) en coordonnées polaires, on obtient :

$$\varrho = I(\lambda_2)\cos^2\omega + I(\lambda_1)\sin^2\omega \tag{6'}$$

$$\varrho_1 = \frac{k}{B}\sin^2\omega + \frac{k}{A}\cos^2\omega \tag{8'}$$

Donc c'est justement la courbe de Gauss où l'on fait :

$$\frac{k}{B} = I(\lambda_1) \quad \text{et} \quad \frac{k}{A} = I(\lambda_2)$$

et qui pour $I(\lambda_1) = I(\lambda_2)$ se réduit à un cercle.

b) Si on coupe la surface par les plans : $z = \pm k$, $y = \pm k$, $x = \pm k$, et si l'on prende la valeur de $\lambda$ pour la quelle on a :

$$I(\lambda_1) = I(\lambda_2) = I(\lambda).$$

On obtient pour séctions les cercles :

$$x^2 + y^2 = I^2(\lambda) - k^2$$
$$z^2 + x^2 = I^2(\lambda) - k^2$$
$$y^2 + z^2 = I^2(\lambda) - k^2$$

Chacune de ces équations répresente deux cercles symètriques par rapport aux plans des coordonnées qui sont comme nous l'avons montré des plans de symétrie pour la surface.

Donc :

*Outre les génératrices circulaires, la surface contient six autres cercles situés dans des plans symétriques par rapport aux plans des coordonnées.*

MŰEGYETEM · MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET

## Travaux cités

1. M. Ghermanescu.- *Sur la variation du moment d'inertie par rapport aux plans passant par une droite.* (Bull. Scient. Ec. Polyt. Timişoara 1939. Tome VIII. pag. 172).
2. Gaston Julia.- *Cours de Géom. de L'Ec. Polit.* Paris, 1941 (pag. 419) Éditeur Gauthier-Villars.
3. Demartres.- *Sur les surfaces à génératrice circulaire,* (Ann. Scient de L'Ec. Norm. Sup. 1885 Tome II pag. 123).
4. Demartres.- *Géometrie infinitésimale,* 1913. (pag. 310) Edit. Gauthier-Villars.
5. Gauss.- *Recherches sur les surfaces courbes,* (1870. pag. 94).

*Séminaire Mathématique*
*de l'Ecole Polytechnique*
*de Jassy*

*(Réçu le 30 Juin 1946)*

# SUR UNE CERTAINE DÉFORMATION DES CONGRUENCES DE SPHÈRES

par

ADOLF HAIMOVICI

On a étudié de divers points de vue la correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces d'un espace euclidien.

Si l'on déplace l'une des surfaces, on voit que cette correspondance se réduit à une correspondance qui conserve l'angle de deux plans tangents infiniment voisins.

Ce problème peut être étudié aussi dans l'espace conforme, en remplaçant la congruence des plans tangents par une congruence de sphères et en imposant à la correspondance la condition de conserver les angles de deux sphères infiniment voisines de la congruence.

On établit pour cette correspondance un théorème analogue à celui de Peterson. Dans le cas général les calculs sont compliqués. C'est pourquoi nous nous sommes limités à étudier seulement quelques cas particuliers.

§ 1. Soit $(\Gamma)$ une congruence de sphères ; soit **A** la sphère courante de cette congruence ; soient $u_1$, $u_2$ les paramètres dont dépend **A**. Attachons à chaque sphère **A** de la congruence un repère formé par :

1. La sphère **A** de la congruence ;
2. Les points **M** et **N** caractéristiques de la sphère.
3. Deux sphères $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ orthogonales entre elles, orthogonales à **A** et passant par **M** et **N**.

Les points **M** et **N** sont situés sur les deux enveloppes $(S)$ et $(\Sigma)$ de $(\Gamma)$.

Par le choix que nous avons fait du repère, on voit que nous avons exclu de notre étude les congruences de sphères de courbure principale, ces sphères ayant la propriété que l'une quelconque d'entre

elles est tangente à la sphère infiniment voisine. Les points **M** et **N** seront donc confondus. Le repère de plus haut est précisément le repère de M. E. Cartan [1]), attaché au point courant **M** de $(S)$ ou au point **N** de $(\Sigma)$.

Normalisons les coordonnées pentasphériques des sphères du repère, de manière que :

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{M}_1^2 = \mathbf{M}_2^2 = 1,$$

$$\mathbf{M}\,\mathbf{N} = -1\ ^2).$$

On reconnait aisément que $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ sont déterminées à une transformation orthogonale de déterminant $+1$ près et que **M** est déterminée à un facteur de proportionnalité près.

§ 2. Les formules des déplacements des sphères sont :

$$1)\quad \begin{cases} d\mathbf{M} = \theta\,\mathbf{M} + \omega_i\,\mathbf{M}_i\,, \\ d\mathbf{N} = -\theta\,\mathbf{N} + \chi_i\,\mathbf{M}_i\,, \\ d\mathbf{A} = \psi_i\,\mathbf{M}_i\,, \\ d\mathbf{M}_i = \omega_i\,\mathbf{N} + \chi_i\,\mathbf{M} + \pi_{ij}\,\mathbf{M}_j - \psi_i\,\mathbf{A},^3) \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2).$$

$\omega_i$, $\chi_i$, $\psi_i$, $\theta$, $\pi_{ij}$ étant des pfaffiens des variables $u_1$, $u_2$ dont dépend la sphère de $(\Gamma)$, satisfaisant aux conditions :

$$\pi_{12} + \pi_{21} = 0,$$

$$\pi_{11} = \pi_{22} = 0.$$

Les conditions d'intégrabilité de ces formules s'obtiennent en égalant à zéro les covariants bilinéaires des premiers membres de (1) et en projetant ces égalités sur les sphères du repère. On obtient :

$$(2)\quad \begin{aligned} \theta' &= [\omega_i\,,\chi_i\,], \\ 0 &= [\psi_i\,,\omega_i\,], \\ 0 &= [\psi_i\,,\chi_i\,], \\ \omega'_i &= [\theta,\omega_i\,] + [\pi_{ij}\,,\omega_j\,], \\ \chi'_i &= [\chi_i\,,\theta] + [\pi_{ij},\chi_j\,], \\ \pi'_{ij} &= [\omega_i\,,\chi_j\,] - [\omega_j\,,\chi_i\,] - [\psi_i\,,\psi_j\,], \\ \psi'_i &= [\psi_j\,,\pi_{ji}]. \end{aligned}$$

§ 3. Supposons maintenant qu'on déforme la congruence $(\Gamma)$ de manière que l'angle infiniment petit de deux sphères infiniment voisines reste invariant. Désignons par $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{M}}_i$, $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{N}}$, les sphères du repère

attaché à la sphère $\overline{\mathbf{A}}$ de la congruence déformée $(\overline{\Gamma})$ ; ces sphères correspondent à $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{M}}_i$, $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{N}}$. De même désignons par $\overline{\omega}_i$, $\overline{\chi}_i$, $\overline{\theta}$, $\overline{\psi}_i$, $\overline{\pi}_{ij}$ les pfaffiens correspondants respectivement à $\omega_i$ , $\chi_i$ , $\theta$, $\psi_i$ , $\pi_{ij}$ dans la déformation. Supposons que les sphères correspondantes dans la déformation ont mêmes paramètres $u_i$.

La correspondance se traduit alors par les égalités :

$$\overline{\psi}_i = \psi_i. \tag{3}$$

En égalant les covariants bilinéaires des deux membres de (3), en tenant compte de (2), on voit que :

$$[\overline{\pi}_{12} - \pi_{12}, \psi_1] = [\overline{\pi}_{12} - \pi_{12}, \psi_2] = 0;$$

$\psi_1$, $\psi_2$ étant indépendants, il suit qu'on doit avoir :

$$\overline{\pi}_{12} = \pi_{12}. \tag{4}$$

§ 4. *Théorème de Peterson.* On peut définir sur une enveloppe $(S)$ de $\infty^2$ sphères de l'espace conforme, la notion de directions conjugées dans la congruence des sphères $(\Gamma)$, qui engendrent l'enveloppe. Soit $\delta\mathbf{M}$ un déplacement sur $(S)$. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ les sphères de la congruence $(\Gamma)$ tangentes à $(S)$ en $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M} + \delta\mathbf{M}$ respectivement. On dira que la direction $d\mathbf{M}$ est conjugée à $\delta\mathbf{M}$ dans $(\Gamma)$, si elles est tangente au cercle d'intersection de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$. En désignant par $\psi_1$, $\psi_2$ les valeurs des pfaffiens pour le déplacement $d\mathbf{M}$ et par $\psi_1^*$, $\psi_2^*$ les valeurs des mêmes pfaffiens pour le déplacement $\delta\mathbf{M}$, on s'assure sans peine que la relation entre ces déplacements est donnée par :

$$\alpha\,\psi_1\,\psi_1^* + \beta\,(\psi_1\,\psi_2^* + \psi_2\,\psi_1^*) + \gamma\,\psi_2\,\psi_2^* = 0,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant des coefficients qui ne nous intéressent pas. Pour la surface déformée, cette relation s'écrira :

$$\overline{\alpha}\,\psi_1\,\psi_1^* + \overline{\beta}\,(\psi_1\,\psi_2^* + \psi_2\,\psi_1^*) + \overline{\gamma}\,\psi_2\,\psi_2^* = 0.$$

Ces correspondances entre directions conjuguées sont évidemment des involutions. Or deux involutions ont toujours un couple commun. Il suit donc le théorème suivant : Si entre deux congruences de sphères on a établi une correspondance qui conserve l'angle de deux sphères infiniment voisines, cette correspondance conserve aussi, en chaque point de l'enveloppe, deux directions conjuguées dans les congruences qui engendrent les enveloppes.

§ 5. Cherchons les congruences admettant une déformation de l'espèce considérée et qui, en plus, conservent l'angle de deux direc-

ions issues des points de l'une des nappes de l'enveloppe de (Γ), disons (S). Cette condition s'écrit :

$$\bar{\omega}_i = \omega_i. \tag{6}$$

En prenant les covariants bilinéaires des deux membres de (6), en tenant compte de (2), il suit :

$$[\bar{\theta} - \theta, \omega_i] = 0,$$

En supposant que l'enveloppe (S) n'est pas dégénérée, il suit que les pfaffiens $\omega_i$ sont indépendants et parsuite :

$$\bar{\theta} - \theta = 0. \tag{7}$$

En prenant les covariants bilinéaires des deux membres de (7), en tenant compte de (2), on obtient :

$$[\bar{\chi}_i - \chi_i, \omega_i] = 0^5);$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \bar{\chi}_1 - \chi_1 = a\,\omega_1 + b\,\omega_2, \\ \bar{\chi}_2 - \chi_2 = b\,\omega_1 + c\,\omega_2, \end{cases} \tag{7'}$$

$a$, $b$, $c$ étant des coefficients, pour le moment indéterminés, dépendants de $u_1$, $u_2$. D'autre part, les égalités :

$$[\psi_i, \chi_i] = [\psi_i, \bar{\chi}_i] = 0,$$

extraites de (2), donnent :

$$[\psi_i, \bar{\chi}_i - \chi_i] = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \bar{\chi}_1 - \chi_1 = \alpha\,\psi_1 + \beta\,\psi_2, \\ \bar{\chi}_2 - \chi_2 = \beta\,\psi_1 + \gamma\,\psi_2, \end{cases} \tag{8}$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant des nouvelles fonctions arbitraires de $u_1$, $u_2$.
En choisissant maintenant comme lignes $\omega_i = 0$, les lignes de courbure, il résultera :

$$\psi_1 = a_1\,\omega_1, \quad , \quad \psi_2 = a_2\,\omega_2{}^6). \tag{9}$$

En remplaçant les valeurs de $\psi_i$ de (9) dans (8), et en comparant avec (7'), il résulte qu'on doit avoir :

$$a_1 = a_2 \qquad \text{ou :} \quad \beta = b = 0.$$

§ 6. Etudions d'abord le cas : $\beta = b = 0$. De (7'), on a :

$$\bar{\chi}_1 - \chi_1 = a\,\omega_1$$
$$\bar{\chi}_2 - \chi_2 = c\,\omega_2.$$

En égalant les covariants bilinéaires des deux membres de (4), on déduit :

$$a + c = 0.$$

En changeant la normalisation de **M**, on peut faire :

$$a = 1, \qquad c = -1.^{7})$$

Il suit donc :

$$(10) \qquad \begin{cases} \bar{\chi}_1 - \chi_1 = \omega_1, \\ \bar{\chi}_2 - \chi_2 = -\omega_2. \end{cases}$$

Ces égalités montrent que dans l'hypothèse où nous nous sommes posés, il y a une seule congruence déformée de la congruence donnée initialement.

Cherchons maintenant quelles conditions doit remplir (Γ), pour qu'elle admette une telle déformation. Egalons les covariants bilinéaires des deux membres de (10). En tenant compte de (2), on a :

$$[\theta, \omega_1] + [\pi_{12}, \omega_2] = 0,$$
$$[\theta, \omega_2] - [\pi_{12}, \omega_1] = 0,$$

ce qui donne :

$$(11) \qquad \begin{cases} \theta = h\,\omega_1 + k\,\omega_2, \\ \pi_{12} = k\,\omega_1 - h\,\omega_2, \end{cases}$$

$h$ et $k$ étant des fonctions à déterminer. Ce sont les seules conditions, comme on voit, pour que (Γ) admette une déformation de l'espèce considérée.

Déterminons maintenant les valeurs de $h$ et de $k$, de même que les valeurs des autres pfaffiens de (Γ). Observons que :

$$\omega'_1 = \omega'_2 = 0\,;$$

ce qui nous permet de poser :

$$(12) \qquad \begin{cases} \omega_1 = du^1, \\ \omega_2 = du^2. \end{cases}$$

Egalons les covariants bilinéaires des deux membres de la première égalité (11) :

$$[\chi_1 - dh, \omega_1] + [\chi_2 - dk, \omega_2] = 0.$$

On tire d'ici :

$$(13)\qquad \begin{cases} \chi_1 = \lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2 + dh, \\ \chi_2 = \mu\,\omega_1 + \nu\,\omega_2 + dk, \end{cases}$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant des nouveaux coefficients à déterminer. De la deuxième égalité (11), on tire de la même manière :

$$(14)\qquad \begin{cases} \chi_2 - dk + \dfrac{\alpha_1\,\alpha_2}{2}\,\omega_2 = e\,\omega_1 + f\,\omega_2, \\ \chi_1 - dh + \dfrac{\alpha_1\,\alpha_2}{2}\,\omega_1 = -f\,\omega_1 + g\,\omega_2, \end{cases}$$

$e$, $f$, $g$ étant des fonctions arbitraires de $u_1$, $u_2$. En remplaçant dans (14), $\chi_1$, $\chi_2$ par leurs valeurs de (13) et en égalant les valeurs de $f$, on déduit :

$$(15)\qquad \lambda + \nu = -\,\alpha_1\,\alpha_2.$$

L'égalité :

$$[\chi_i,\ \psi_i] = 0,$$

de (2), s'écrit à l'aide de (13) :

$$\mu\,(\alpha_2 - \alpha_1)[\omega_1, \omega_2] + \alpha_1\,[dh, \omega_1] + \alpha_2\,[dk, \omega_2] = 0.$$

En tenant compte de (12), cette relation s'écrit :

$$(16)\qquad \mu\,(\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_1 \frac{\delta h}{\delta u_2} - \alpha_2 \frac{\delta k}{\delta u_1}.$$

En égalant maintenant les covariants bilinéaires des deux membres de (13), en tenant compte de (11), on obtient :

$$[(d\lambda - h\chi_1 + k\chi_2),\ \omega_1] + [(d\mu - k\chi_1 - h\chi_2),\ \omega_2] = 0,$$
$$[(d\mu - h\chi_2 - k\chi_1),\ \omega_1] + [(d\nu - k\chi_2 + h\chi_1),\ \omega_2] = 0,$$

c'est-à-dire :

$$d\lambda - h\omega_1 + k\chi_2 = m\omega_1 + n\omega_2,$$
$$d\mu - k\chi_1 - h\chi_2 = n\omega_1 + p\omega_2,$$
$$d\nu - k\chi_2 + h\chi_1 = p\omega_1 + q\omega_2.$$

Éliminons maintenant $n$ et $p$, en tenant compte de (12) :

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta\lambda}{\delta u_2} - \dfrac{\delta\mu}{\delta u_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta}{\delta u_2}(k^2 - h^2) + \dfrac{\delta}{\delta u_1}(hk) + k(\lambda + \nu) = 0, \\ \dfrac{\delta\mu}{\delta u_2} - \dfrac{\delta\nu}{\delta u_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta}{\delta u_1}(k^2 - h^2) - \dfrac{\delta}{\delta u_2}(hk) - h(\lambda + \nu) = 0. \end{cases}$$

La dernière équation (2) donne :

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta \alpha_1}{\delta u_2} = -k\alpha_2, \\ \dfrac{\delta \alpha_2}{\delta u_1} = -h\alpha_1. \end{cases}$$

Pour connaître les déplacements du pentasphère attaché à une sphère de la congruence et parsuite la congruence, nous avons à étudier le système formé par les équations (15), (16), (17), (18). Pour intégrer ce système, dérivons la première équation (17) par rapport à $u_1$ et la seconde par rapport à $u_2$ et soustrayons les résultats : On arrive à :

$$(20)\qquad \frac{\delta^2(\lambda+\nu)}{\delta u_1\,\delta u_2} - \frac{\delta^2}{\delta u_1^2}(\mu - hk) - \frac{\delta^2}{\delta u_2^2}(\mu - hk) + \\ + \frac{\delta}{\delta u_1}[k(\lambda+\nu)] - \frac{\delta}{\delta u_2}[h(\lambda+\nu)] = 0.$$

En tenant compte de (16) et de (18), on déduit :

$$(21)\qquad \mu - hk = -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\,\frac{\delta^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{\delta u_1\,\delta u_2}.$$

En utilisant (15), (18), et (21), l'équation (20) s'écrit :

$$(22)\qquad \frac{1}{2}\frac{\delta^2 z}{\delta u_1\,\delta u_2} + \frac{\delta^2}{\delta u_1^2}\left(\frac{1}{z}\frac{\delta^2 z}{\delta u_1\,\delta u_2}\right) + \frac{\delta^2}{\delta u_2^2}\left(\frac{1}{z}\frac{\delta^2 z}{\delta u_1\,\delta u_2}\right) = 0,$$

où nous avons posé ;

$$(23)\qquad z = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Notre problème se réduit donc à l'intégration de cette équation ; En effet si l'on connait $z$ on déduit

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\varphi + z$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\varphi - z,$$

$\varphi$ étant une fonction arbitraire de $u_1$ $u_2$ ; (18) donnera $h$ et $k$, (21) donnera $\mu$, (17) donnera $\lambda$ et $\nu$ à une fonction arbitraire de $u_1$ resp. $u_2$ près ; (15) déterminera ces fonctions.

§ 7. Etudions le cas particulier :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = f(u_1).$$

L'équation (22) est évidemment satisfaite. De (18) et (21) on tire ;

$$h = -\frac{1}{\alpha_2 + f}\frac{\delta\alpha_2}{\delta u_1}, \qquad k = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\delta\alpha_2}{\delta u_2},$$

$$\mu = -\frac{1}{\alpha_2(\alpha_2 + f)}\frac{\delta\alpha_2}{\delta u_1}\cdot\frac{\delta\alpha_2}{\delta u_2} = 0.$$

De (17) et (15) enfin :

$$\lambda = \frac{1}{2}(h^2 - k^2 - \alpha_2{}^2 - 2\alpha_2 f)$$

$$\nu = \frac{1}{2}(k^2 - h^2 - \alpha_2{}^2)$$

$h$ et $k$ ayant les valeurs de plus haut.

§ 8. Voyons encore le cas :

$$h = k = 0.$$

De (18), on déduit :

$$\alpha_2 = \alpha_2(u_2); \qquad \alpha_1 = \alpha_1(u_1).$$

(17) devient :

$$(23)\qquad \begin{aligned} \frac{\delta\lambda}{\delta u_2} - \frac{\delta\mu}{\delta u_1} &= 0, \\ \frac{\delta\mu}{\delta u_2} - \frac{\delta\nu}{\delta u_1} &= 0. \end{aligned}$$

Effectuons maintenant un changement des paramètres de la surface, de manière à avoir ;

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = 1.$$

(15) devient alors :

$$\lambda + \nu = -1,$$

et les relations (23) montrent que $\lambda$ et $\mu$ sont des fonctions harmoniques de $u_1$, $u_2$.

§ 9. *Le cas* $\alpha_2 = \alpha_1$. Comme au § 6, en égalant les covariants bilinéaires des deux membres de (4), on obtient :

$$a = -c,$$

c'est-à-dire :

$$(24)\qquad \begin{aligned} \bar{\chi}_1 - \chi_1 &= a\,\omega_1 + b\,\omega_2, \\ \bar{\chi}_2 - \chi_2 &= b\,\omega_1 - a\,\omega_2. \end{aligned}$$

Effectuons maintenant dans le pentasphère attaché à la sphère **A** et

dans celui attaché à $\bar{\mathbf{A}}$, une rotation d'angle $\varphi$ des sphères $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$, $\varphi$ étant, pour le moment, indéterminée. Soient

$$\mathbf{M}_1^* = \mathbf{M}_1 \cos\varphi - \mathbf{M}_2 \sin\varphi,$$
$$\mathbf{M}_2^* = \mathbf{M}_1 \sin\varphi - \mathbf{M}_2 \cos\varphi,$$

les nouvelles sphères du repère attaché à $\mathbf{A}$. Dans les nouveaux pentasphéres, on aura :

$$d\mathbf{M} = (\omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi)\,\mathbf{M}_1^* + (\omega_1 \sin\varphi - \omega_2 \cos\varphi)\,\mathbf{M}_2^*,$$
$$d\mathbf{N} = \chi_1^*\,\mathbf{M}_1^* + \chi_2^*\,\mathbf{M}_2^*,$$
$$d\bar{\mathbf{N}} = \bar{\chi}_1^*\,\bar{\mathbf{M}}_1^* + \bar{\chi}_2^*\,\bar{\mathbf{M}}_2^*,$$

où on a posé :

$$\chi_1^* = \chi_1 \cos\varphi - \chi_2 \sin\varphi, \qquad \bar{\chi}_1^* = \bar{\chi}_1 \cos\varphi - \bar{\chi}_2 \sin\varphi,$$
$$\chi_2^* = \chi_1 \sin\varphi + \chi_2 \cos\varphi, \qquad \bar{\chi}_2^* = \bar{\chi}_1 \sin\varphi + \bar{\chi}_2 \cos\varphi.$$

Déterminons maintenant $\varphi$ par la condition que les quantités $\bar{\chi}_i^* - \chi_i^*$ soient proportionnelles aux coefficients de $\mathbf{M}$ dans $d\mathbf{M}$. On devra avoir, en tenant compte de (24) :

$$(a\omega_1 + b\omega_2)\cos\varphi - (b\omega_1 - a\omega_2)\sin\varphi = \lambda(\omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi),$$
$$(a\omega_1 + b\omega_2)\sin\varphi + (b\omega_1 - a\omega_2)\cos\varphi = \mu(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi).$$

Pour que ces relations soient satisfaites, il faut que :

$$a\cos\varphi - b\sin\varphi = \lambda\cos\varphi,$$
$$b\cos\varphi + a\sin\varphi = -\lambda\sin\varphi,$$
$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = \mu\sin\varphi,$$
$$b\sin\varphi - a\cos\varphi = \mu\cos\varphi.$$

On s'assure aisément que ce système est compatible et qu'il détérmine les valeurs de $\lambda$ et de $\varphi$. Supposons donc choisies les sphères $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ de manière que la condition de plus haut soit satisfaite. (On voit que la transformation de plus haut ne change pas la relation $\psi_i = \alpha_i \omega_i$). (24) s'écrivent alors :

$$\bar{\chi}_1 - \chi_1 = \lambda\,\omega_1$$
$$\bar{\chi}_2 - \chi_2 = -\lambda\,\omega_2.$$

Par un changement de normalisation on peut faire ensuite : $\lambda = 1$. Il suit donc que, comme au cas précédent, il existe une seule congruence déformée. En suivant la même méthode qu'au § 6, on voit qu'on aboutit aux équations (15), (16), (18), (17), dans lesquelles $\alpha_2 = \alpha_1$. Ces équations s'écrivent alors :

$$\lambda + \nu = -\alpha_1^2,$$

$$\frac{\delta h}{\delta u_2} = \frac{\delta k}{\delta u_1},$$

$$h = \frac{\delta}{\delta u_1}\left(\log \frac{1}{\alpha_1}\right),$$

(25)

$$k = \frac{\delta}{\delta u_1}\left(\log \frac{1}{\alpha_1}\right),$$

$$\frac{\delta}{\delta u_2}\left\{\lambda + \frac{1}{2}(k^2 - h^2) + \frac{1}{2}\alpha_1^2\right\} = \frac{\delta}{\delta u_1}(\mu - hk),$$

$$\frac{\delta}{\delta u_1}\left\{\nu - \frac{1}{2}(k^2 - h^2) + \frac{1}{2}\alpha_1^2\right\} = \frac{\delta}{\delta u_2}(\mu - hk).$$

Les deux dernières donnent :

$$\mu - hk = \frac{\delta^2 \mathcal{X}}{\delta u_1 \delta u_2},$$

$$\lambda + \frac{1}{2}(k^2 - h^2 + \alpha_1^2) = \frac{\delta^2 \mathcal{X}}{\delta u_2^2}.$$

$\mathcal{X}$ étant une fonction arbitraire de $u_1$, $u_2$. En remplaçant ces valeurs de $\lambda$ et $\nu$ dans la première équation (25), on arrive à :

$$\frac{\delta^2 \mathcal{X}}{\delta u_1^2} + \frac{\delta^2 \mathcal{X}}{\delta u_2^2} = 0,$$

ce qui prouve que $\mathcal{X}$ est un fonction harmonique de $u_1$, $u_2$. Enfin la deuxième équation de (25) est identiquement satisfaite par les valeurs tirées de la troisième et de la quatrième équation (25). Nous avons donc trouvé tous les déplacements des pentasphères attachés aux sphères des congruences $(\Gamma)$ et $(\overline{\Gamma})$. On peut démontrer que les enveloppes $(S)$ et $(\overline{S})$ sont des sphères. En effet, la sphère :

$$\mathbf{A} - \alpha_1 \mathbf{M},$$

reste fixe dans l'espace, parcequ'on a, à l'aide de (1), (11), (12) et (25) :

$$d(\mathbf{A} - \alpha_1 \mathbf{M}) = 0.$$

Or les sphères $\mathbf{A}$ sont tangentes à $\mathbf{A} - \alpha_1 \mathbf{M}$, parce qu'elles font partie du faisceau linéaire $(\mathbf{A} - \alpha_1 \mathbf{M}, \mathbf{M})$.

§ 10. Cherchons les congruences $(\Gamma)$, qui se déforment en $(\overline{\Gamma})$ en conservant l'angle de deux sphères infiniment voisines et pour lesquelles : $1^0$. Le réseau de Peterson soit formé des lignes de courbure sur $(S)$ et sur $(\overline{S})$ ; $2^0$. La correspondance $\mathbf{M} - \mathbf{N}$ entre $(S)$ et $(\Sigma)$ con-

serve les lignes de courbure ; $3^0$. La correspondance $\overline{\mathbf{M}} - \overline{\mathbf{N}}$ conserve les lignes de courbure.

En choisissant sur $(S)$ les lignes de courbure comme lignes de coordonnées $\omega_i = 0$, nous aurons :

$$(26)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \alpha_1 \psi_1, \\ \omega_2 = \alpha_2 \psi_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \chi_1 = \beta_1 \psi_1, \\ \chi_2 = \beta_2 \psi_2, \end{cases}$$

$$(27)\qquad \begin{cases} \overline{\omega_1} = \overline{\alpha}_1 \psi_1, \\ \overline{\omega_2} = \overline{\alpha}_2 \psi_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{\chi_1} = \overline{\beta}_1 \psi_1, \\ \overline{\chi_2} = \overline{\beta}_2 \psi_2. \end{cases}$$

En remplaçant (26) dans (2), on arrive aux équations différentielles qui donneront les congruences $(\Gamma)$.

$$\theta = 0,$$
$$d\alpha_1 = e\psi_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) f \psi_2,$$
$$d\alpha_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) g \psi_1 + h \psi_2,$$
$$d\beta_1 = e_1 \psi_1 + (\beta_1 - \beta_2) f \psi_2,$$
$$d\beta_2 = (\beta_1 - \beta_2) g \psi_1 + h_1 \psi_2,$$
$$\pi_{12} = f\psi_1 + g\psi_2,$$
$$[df, \psi_1] + [dg, \psi_2] = (f^2 + g^2 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 - 1)[\psi_2, \psi_1],$$

$e$, $f$, $g$, $h$ étant des coefficients à déterminer. Les congruences $(\overline{\Gamma})$ seront données par des équations analogues, avec la seule condition tirée de $\overline{\pi_{12}}' - \pi_{12}' = 0$ :

$$\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = \overline{\alpha}_1 \overline{\beta}_2 + \overline{\alpha}_2 \overline{\beta}_1,$$

En particulier, pour :

$$f = g = 0,$$

$$d\alpha_1 = e\psi_1, \qquad \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + 1 = 0,$$
$$d\alpha_2 = h\psi_2, \qquad \theta = \pi_{12} = 0$$
$$d\beta_1 = h_1 \psi_2, \qquad \psi_1' = \psi_2' = 0.$$
$$d\beta_2 = h_1 \psi_2,$$

En prenant ;

$$\psi_1 = du_1, \qquad \psi_2 = du_2,$$

on voit que $\alpha_1$ et $\beta_1$ doivent être des fonctions de $u_1$, $\alpha_2$ et $\beta_2$ des fonctions de $u_2$, ayant les valeurs :

$$\beta_1 = a\alpha_1 + b,$$
$$\beta_2 = -\frac{a}{b}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{b},$$

$a$ et $b$ étant des constantes arbitraires, ou bien les valeurs :

$$\beta_2 = \bar{a}\alpha_2 + \bar{b},$$

$$\beta_1 = -\frac{\bar{a}}{\bar{b}}, \qquad \alpha_1 = \frac{1}{\bar{b}}.$$

11. Etudions enfin le cas des congruences dont les deux nappes se réduisent à une surface cerclée, la déformation conservant les cercles.

Cherchons d'abord la condition pour que les lignes $\omega_1 = 0$ soient des cercles. Ces cercles seront situés sur la sphère $\mathbf{A}$ et sur la sphère $\mathbf{M}_1$. En effet, quand le point $\mathbf{M}$ se déplace sur la ligne $\omega_1 = 0$, son déplacement est donné d'après (1), par la formule :

$$d\mathbf{M} = \theta\,\mathbf{M} + \omega_2\,\mathbf{M}_2.$$

Or $d\mathbf{M}$ représente une sphère du faisceau linéaire $(\mathbf{M}, \mathbf{M} + d\mathbf{M})$, c'est-à-dire une sphère orthogonale au déplacement $d\mathbf{M}$. D'autre part cette sphère fait partie du faisceau linéaire $(\mathbf{M}, \mathbf{M}_2)$ ; elle est donc tangente à $\mathbf{M}_2$. Notre affirmation est donc démontrée. Pour écrire que le cercle $(\mathbf{A}, \mathbf{M}_1)$ reste fixe quand $\mathbf{M}$ se déplace sur la ligne :

$$\omega_1 = 0,$$

il faut écrire que $d\mathbf{A}$ et $d\mathbf{M}$ ont des composantes seulement sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{M}$, pour $\omega_1 = 0$. Il faut donc avoir, en tenant compte de (1) :

$$\chi_1 = x\,\omega_1,$$
$$\pi_{12} = y\,\omega_1,$$
$$\psi_2 = z\,\omega_1,$$

$x$, $y$, $z$ étant des fonction arbitraires de $u_1$, $u_2$. Pour la déformée, les cercles se conservant, nous aurons :

$$\bar{\chi}_1 = \bar{x}\,\bar{\omega}_1,$$
$$\bar{\pi}_{12} = \bar{y}\,\bar{\omega}_1,$$
$$\bar{\psi}_2 = \bar{z}\,\bar{\omega}_1,$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ étant des fonctions arbitraires. Comme on a, d'après les considérations générales du § 3,

$$\bar{\psi}_i = \psi_i,$$
$$\bar{\pi}_{12} = \pi_{12},$$

il suit que :

$$\bar{\omega}_1 = \lambda\,\omega_1,$$

$\lambda$ étant un facteur de proportionnalité. On peut maintenant normaliser $\overline{\mathbf{M}}$, de manière que $\lambda = 1$, c'est-à-dire :

$$\overline{\omega_1} = \omega_1.$$

On déduit alors, immédiatement :

$$\bar{y} = y,$$
$$\bar{z} = z,$$

Nous supposerons maintenant $\mathbf{M}$, normalisée de manière que : (si $x \neq 0$)

$$x = 1.$$

Nous aurons donc, pour les deux congruences :

$$(28) \qquad \begin{aligned} \chi_1 &= \omega_1 & \pi_{12} &= y\,\omega_1, \\ \overline{\chi_1} &= \bar{x}\,\omega_1 & \psi_2 &= z\,\omega_1.^{8}) \end{aligned}$$

Développons maintenant ces relations en tenant compte de (2) ; de

$$[\psi_i,\ \omega_i] = 0,$$

on déduit :

$$(29) \qquad \begin{aligned} \psi_1 &= \alpha\,\omega_1 + z\,\omega_2, \\ \psi_2 &= z\,\omega_1, \end{aligned}$$

$\alpha$ étant une fonction arbitraire. De même,

$$[\psi_i,\ \overline{\omega}_i] = 0,$$

donne :

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_1 = \psi_1 &= \bar{\alpha}\,\omega_1 + \overline{\omega}_2, \\ \overline{\psi}_2 = \psi_2 &= z\,\omega_1. \end{aligned}$$

En comparant avec les résultats précédents, on obtient :

$$(30) \qquad \overline{\omega_2} = m\,\omega_1 + \omega_2,$$

avec $m$ arbitraire. Par la même méthode, des relations :

$$[\psi_i,\ \chi_i] = [\psi_i,\ \overline{\chi}_i] = 0,$$

on déduit :

$$(31) \qquad \begin{aligned} \chi_2 &= n\,\omega_1 + \omega_2, \\ \overline{\chi}_2 &= p\,\omega_1 + \bar{x}\,\omega_2. \end{aligned}$$

En prenant les covariants bilinéaires des deux membres de

$$\bar{\pi}_{12} = \pi_{12},$$

en tenant compte des résultats de plus haut, on déduit :

$$\bar{x} = 1. \tag{32}$$

L'égalité :

$$(\bar{\omega}_1 - \omega_1)' = 0,$$

donne :

$$\bar{\theta} - \theta = A\,\omega_1, \tag{33}$$

$A$ étant un facteur arbitraire. La relation :

$$(\bar{\chi}_1 - \chi_1)' = 0$$

est identiquement satisfaite. Egalons maintenant les covariants bilinéaires de :

$$\chi_1 = \omega_1, \quad \bar{\chi}_1 = \bar{\omega}_1.$$

On déduit :

$$[\theta, \omega_1] = [\bar{\theta}, \bar{\omega}_1] = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \theta &= B\,\omega_1, \\ \bar{\theta} &= C\,\omega_1, \end{aligned} \tag{34}$$

$B$ et $C$ étant des coefficients de proportionnalité, satisfaisant encore la relation :

$$C - B = A.$$

En tenant compte de ces résultats, l'égalité des dérivées extérieures des deux membres de (33), de (30) et de :

$$\bar{\chi}_2 - \chi_2 = (p - n)\,\omega_1,$$

donne :

$$\begin{cases} dA &= (Ay + m + n - p)\,\omega_2 + \lambda\,\omega_1, \\ dm &= (my + A)\,\omega_2 + \mu\,\omega_1, \\ d(p - n) &= [A + (p - n)\,y]\,\omega_2 + \nu\,\omega_1, \end{cases} \tag{35}$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant des fonctions arbitraires. Ces équations donneront les pfaffiens de la congruence déformée, si l'on connaîtra ceux de la congruence initiale. Cherchons donc les pfaffiens attachés à la congruence (Γ). Ceux-ci doivent satisfaire les égalités :

$$\begin{aligned}
\theta &= B\omega_1,\\
\pi_{12} &= y\omega_1,\\
\chi_1 &= \omega_1,\\
\chi_2 &= n\omega_1, + \omega_2,\\
\psi_1 &= \alpha\omega_1 + z\omega_2,\\
\psi_2 &= z\omega_1.
\end{aligned}$$

Prenons maintenant les covariants bilinéaires des deux membres de ces égalités. On obtient :

$$\begin{aligned}
dB &= (By + n)\omega_2 + a\omega_1,\\
dn &= (ny + 2B)\omega_2 + b\omega_1,\\
dy &= (y^2 - z^2 - 2)\omega_2 + c\omega_1,\\
dz &= 2yz\omega_2 + d\omega_1,\\
(\alpha\omega_1)' + (z\omega_2)' &= 0,
\end{aligned}$$

$a$, $b$, $c$, $d$, étant des fonctions arbitraires. Posons encore :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= X\,du^1,\\
\omega_2 &= Y\,du^2,
\end{aligned}$$

$X$, $Y$ étant des fonctions qui seront déterminées par la suite.

Les relations de plus haut s'écrivent, en éliminant $a$, $b$, $c$, $d$,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta B}{\delta u_2} &= (By + n)Y,\\
\frac{\delta n}{\delta u_2} &= (ny + 2B)Y,\\
\frac{\delta y}{\delta u_2} &= (y^2 - z^2 - 2)Y,\\
\frac{\delta z}{\delta u_2} &= 2yzY,\\
\frac{\delta(\alpha X)}{\delta u_2} &= \frac{\delta(zY)}{\delta u_2},\\
\frac{\delta X}{\delta u_2} &= -yXY,\\
\frac{\delta Y}{\delta u_2} &= BXY.
\end{aligned}$$

Intégrons ce système dans le cas où les cercles et parsuite les sphères **A** sont orthogonales à une sphère fixe. On voit que la sphère :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$$

est fixe quand on se déplace sur $(S)$ de manière que $\omega_1 = 0$. Pour qu'elle reste fixe quand on se déplace sur toute la surface, il faut que :

$$n = 0,$$

ce que nous supposerons. Le systhème de plus haut se réduit à :

$$B = 0,$$

$$\frac{\delta y}{\delta u_2} = (y^2 - z^2 - 2)Y,$$

$$\frac{\delta \log z}{\delta u_2} = -2\frac{\delta \log X}{\delta u_2},$$

$$\frac{\delta X}{\delta u_2} = -yXY,$$

$$\frac{\delta Y}{\delta u_1} = 0,$$

$$\frac{\delta(\alpha X)}{\delta u_2} = \frac{\delta(zY)}{\delta u_1}.$$

On a donc $Y = Y(u_2)$ ; on peut choisir la paramètre $u_2$ de manière que $Y = 1$. La troisième équation donne :

$$z = \frac{1}{X^2}\varphi(u_1).$$

La quatrième donne :

$$y = -\frac{1}{X}\frac{\delta X}{\delta u_2};$$

En introduisant cette valeur dans la deuxième, on obtient :

$$\frac{\delta^2 X}{\delta u_2^2} = \frac{1}{X^3} + 2X.$$

En posant :

$$\frac{\delta X}{\delta u_2} = p \qquad \frac{\delta^2 X}{\delta u_2^2} = p\frac{\delta p}{\delta X}.$$

Cette équation donne :

$$X^2 = a + \frac{1}{C}\left\{e^{2u_2\sqrt{2}} + C^2 e^{\frac{\sqrt{2}}{4}u_2}\left(a^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},$$

$a$ et $C$ étant deux fonctions arbitraires de $u_1$. Il résulte que les surfaces cerclées qui admettent une déformation de l'espèce considérée dépendent de deux fonctions arbitraires d'une variable. Ces surfaces peuvent être considérées comme des surfaces reglées dans l'espace à courbure constante dont l'absolu est la sphère :

$$\mathbf{Q = M - N.}$$

Les sphères génératrices seront des plans tangents à la surface considéré. La déformation qui conserve l'angle de deux sphères infiniment voisines sera une correspondance analogue à la correspondance par plans tangents parallèles. On voit aisément que dans un espace à courbure constante, non nulle une telle correspondance, avec la conservation des génératrices rectilignes, est impossible ; en effet, pour que la déformée soit aussi dans un tel espace, il faut que :

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\chi}_2,$$

c'est-à-dire que :

$$m = p = o.$$

De la troisième équation (35), il suit :

$$A = 0,$$

et la première et la deuxième est identiquement satisfaite. Or dans ce cas tous les pfaffiens sont égaux ; les congruences sont donc égales.

## Notes

1. E. Cartan, *Bull. Soc. Math. France* 45 (1917) pp. 57-121.
2. Pour les notations, voir E. Cartan. *loc cit.*, et aussi A. Haimovici *Annales Scientifiques de l'Univ. de Jassy* T. XXV. (1939), pp. 152-222.
3. Nous adoptons la convention des indices muets.
5. De l'égalité $[\omega_i , \psi_i ] = 0$, on tire $\omega_i = \alpha_{ij} \psi_j$ avec $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ comme on peut se convaincre par un calcul immédiat.
6. En effet si (9) et réalisée, l'angle de la sphère $A - \alpha_i M$ avec $d(A - \alpha_i M)$ est nul. C'est une propriété caractéristique des lignes de courbure.
7. Nous avons supposé $a \neq 0$ ; d'ailleurs l'hypothèse $a = 0$ aura comme conséquence l'égalité de tous les pfaffiens des deux repères et par-suite l'égalité conforme des deux congruences.

8. Sur ces surfaces les cercles sont des lignes autoconjuguées dans (Γ), comme il est facile de s'assurer ; ce sont donc les lignes analogues aux lignes asymptotiques ordinaires. Le réseau de Peterson se réduit dans ce cas à une famille d'asymptotiques.

*Séminaire Mathématique*
*de*
*l'Université de Jassy.*

*(Reçu le 30 Juin 1946)*

# REMARQUE SUR LE POTENTIEL NEWTONIEN

par

MIRON NICOLESCO

1. $V(x, y, z)$ étant le potentiel dû à une masse $M$, de densité $\mu(x, y, z)$, remplissant un domaine $D$ borné, de frontière F, il est bien connu que $V$ et ses dérivées partielles du 1-er ordre sont des fonctions continues dans tout l'espace.

De plus, $V$ est harmonique à l'extérieur de la masse attirante. A l'intérieur de $D$, on a la formule (formule de Poisson)

$$\Delta V = -4\pi\mu. \tag{1}$$

Nous nous proposons, dans cette brève Note, de mettre en évidence la contribution séparée de chaque dérivée seconde dans la formule précédente.

2. Rappelons brièvement la façon dont la formule (1) est obtenue. $P$ étant un point intérieur au domaine $D$, de coordonnées $(x, y, z)$, pour lequel on veut calculer le laplacien de $V$, on entoure ce point d'une sphère $\Sigma$, de rayon $\varrho$, tel que cette sphère soit complètement contenue dans $D$. La sphère $\Sigma$ divise $D$ en deux domaines $D_1$, intérieur à $\Sigma$, et $D_2$. En appelant, respectivement, $V_1$ et $V_2$ les potentiels dûs aux masses occupant les volumes $D_1$ et $D_2$, on a, manifestement,

$$V = V_1 + V_2. \tag{2}$$

On en déduit, puisque $V_2$ est harmonique dans $D_1$,

$$\Delta V = \Delta V_1.$$

Cette formule ramène le calcul du laplacien de $V$ au calcul du laplacien de $V_1$, qui s'effectue facilement et conduit directement à la formule (1).

3. Le calcul précédent ne sépare pas les contributions de dérivées secondes dans la formule (1). C'est pour mettre en évidence ces contributions que nous allons modifier un peu les calculs classiques.

A cet effet, dérivons la formule (2) deux fois par rapport à une même variable, p. ex, par rapport à $n$. On obtient

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} = \frac{\delta_2 V_1}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V_2}{\delta x^2}.$$

Si $\frac{\delta^2 V_1}{\delta x^2}$ et $\frac{\delta^2 V_2}{\delta x^2}$ dépendent, chacun, de $\varrho$, il n'en reste plus trace dans leur somme. Si donc nous montrons que $\frac{\delta^2 V_1}{\delta x^2}$ a une limite pour $\varrho \to 0$, du même coup nous établirons l'existence d'une limite pour $\frac{\delta^2 V_2}{\delta x^2}$. Nous appellerons cette dernière limite la partie «harmonique» de la dérivée $\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}$ au point $P$, et la désignerons par $\frac{\delta^2 V}{\delta x_e^2}$. Or, de

$$V_1 = \iiint_{D_1} \frac{\mu}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

on déduit, par des transformations bien connues,

$$\frac{\delta^2 V_1}{\delta x^2} = \iiint_{D_1} \frac{\delta \mu}{\delta \xi} \cdot \frac{\xi - x}{r^3} d\xi\, d\eta\, d\zeta - \iint_{\Sigma} \mu \frac{\xi - x}{r^3} d\eta\, d\zeta.$$

Dans le second membre, le premier terme tend vers zéro pour $\varrho \to 0$, occupons-nous donc du second. Si l'on désigne par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs de la normale extérieure à $\Sigma$ et par $d\sigma$ l'élément d'aire de $\Sigma$, on a

$$\frac{\xi - x}{r} = \alpha, \qquad d\eta\, d\zeta = \alpha\, d\sigma.$$

D'autre part, sur $\Sigma$ on a $r = \varrho = \text{const.}$

En passant donc aux coordonnées polaires par les formules

$$\xi - x = \varrho \sin\theta \cos\varphi, \quad \eta - y = \varrho \sin\theta \sin\varphi, \quad \zeta - z = \varrho \cos\theta,$$

on aura

$$-\iint_{\Sigma} \mu \frac{\xi - x}{r^3} d\eta\, d\zeta = -\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \mu\,(x + \varrho \sin\theta \cos\varphi, \ldots) \cos^2\varphi\, d\varphi,$$

d'où

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\delta^2 V_1}{\delta x^2} = -\mu(x, y, z) \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi,$$

c'est-à-dire, tous calculs effectués,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\delta^2 V_1}{\delta x^2} = -\frac{4}{3}\pi\mu(x, y, z). \tag{3}$$

Il en résulte que

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\delta^2 V_2}{\delta x^2}$$

existe. Par conséquent, on a la formule fondamentale

$$\boxed{\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 V}{\delta x_e^2} - \frac{4}{3}\pi\mu(x, y, z).} \tag{4}$$

On aura des formules analogues pour les deux autres dérivées partielles.

La formule de Poisson s'en déduit immédiatement. En effet, puisque

$$\frac{\delta^2 V_2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V_2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V_2}{\delta z^2} = 0,$$

quel que soit $\varrho$, on aura, à la limite,

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x_e^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y_e^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z_e^2} = 0,$$

d'où

$$\Delta V = -3 \times \frac{4}{3}\pi\mu(x, y, z) = -4\pi\mu.$$

La formule (4) résout le problème posé au début. Elle montre que *chaque dérivée partielle du second ordre diffère de sa partie harmonique d'une même quantité.* En d'autres termes, si l'on néglige dans chaque dérivée du second ordre sa partie harmonique, ces dérivées interviennent, dans la formule de Poisson, avec *la même contribution.*

*Séminaire Mathématique*
*de l'Université de Bucarest*

*(Reçu le 30 Septembre 1946)*

# SUR LES ESPACES A TOPOLOGIE TRANSITIVE D'ORDRE n.

par

AL. CLIMESCU

1. Pour construire la topologie des espaces abstraits on s'est engagé sur plusieurs voies qui ont mené respectivement :

$1^0$. Aux espaces à topologies par voisinages (Fréchet 6, p. 172 ; Hausdorff 7, Ch. VII ; Weyl 14, Ch. I, § 4).

$2^0$. Aux espaces topologisés à l'aide d'une catégorie de sousensembles distingués, par ex. à l'aide des

I. ensembles ouverts (Sierpiński 12),

II. ensembles fermés (Sierpiński 11),

III. ensembles séparés (Szymanski 13).

$3^0$. Aux espaces topologisés à l'aide d'une opération prise comme terme primitif et qu'on peut appliquer à chaque sousensemble de l'espace. On peut par ex. prendre comme terme primitif :

I. La dérivée (Moore 10, Fréchet 6, Appert 2) ;

II. La fermeture (Kuratowski 8,9 et Appert 3) ;

III. Les ensembles frontière (Zarycki 15, Albuquerque 1) ;

IV. L'intérieur (Zarycki 15, Appert 3) ;

V. L'extérieur (Zarycki 15) ;

VI. Le noyau (Zarycki 16).

La construction la plus poussée nous semble être à l'heure actuelle celle qui part de la notion de fermeture, les axiomes choisis par Kuratowski pour les espaces $(K)$ étant assez peu restrictifs pour que la plupart des espaces intéressants soient des espaces $(K)$. D'autres auteurs ont aussi signalé les avantages dûs au choix de la fermeture comme terme primitif et M. Appert (3,4) a fortement insisté sur le rôle simplificateur d'un des axiomes des espaces $(K)$, qu'il appelle condition $\alpha$ et qui revient à l'égalité $f(f(A)) = f(A)$, où $f(A)$ est la fermeture de $A < K$ ; la condition $\alpha$ exprime ce qu'on peut appeler le caractère stationnaire d'ordre un de la fermeture.

Rappelons que $\overline{A}$ étant la fermeture de $A$, les axiomes des espaces $(K)$ sont les suivants :

$$\text{I. } \overline{0} = 0$$
$$\text{II. } A < \overline{A}$$
$$\text{III. } \overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}.$$
$$\text{IV. } \overline{\overline{A}} = \overline{A} \text{ (condition } \alpha)$$

tandis que les axiomes des espaces $(V)$ de Fréchet sont les suivants :

$$\text{I. } \overline{0} = 0$$
$$\text{II. } A < \overline{A}$$
$$\text{III. } \overline{B} < \overline{A + B}.$$

On voit donc que les espaces $(K)$ sont des espaces $(V)$ particularisés et on obtient ce que M. Appert appelle espaces à topologie transitive si aux trois axiomes des espaces $(V)$ on ajoute la condition $\alpha$ c'est-à-dire l'axiome

$$\text{IV. } \overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

2. Si large que soit la classe des espaces à topologie transitive, elle laisse échapper certains espaces $(V)$, pourtant bien intéressants, fournis surtout par l'algèbre. Etant donné que nous pensons que l'interpénétration de l'algèbre et de la topologie est hautement désirable, nous nous proposons, avec exemples à l'appui, de choisir pour la fermeture des axiomes moins restrictifs et de donner quelques règles de calcul qui montreront d'ailleurs que les modifications à apporter à la technique du calcul ne sont pas tellement importantes qu'on aurait pu le croire. Nous espérons pouvoir revenir prochainement sur certaines questions d'algèbre qui se laissent traiter par les méthodes de la topologie.

3. Commençons par donner quelques exemples.

I. Soit $A$ un ensemble plan quelconque, $\overline{A}$ sa fermeture euclidienne, $A_1$ l'ensemble obtenu de $A$ par une rotation de $180^0$. Appelons fermeture de $A$ l'ensemble $f(A)$ défini par l'égalité

$$f(A) = A + \overline{A}_1.$$

En tenant compte du fait que le plan euclidien est un espace $(K)$, on obtient sans peine les propriétés suivantes :

$$1^0.\ f(0) = 0.$$
$$2^0.\ A < f(A).$$
$$3^0.\ f(A+B) = f(A) + f(B).$$

En effet on a

$$f(A+B) = A+B+\overline{(A+B)_1} = A+B+\overline{A_1+B_1} =$$
$$= A+B+\overline{A}_1+\overline{B}_1 = f(A)+f(B)$$

$$4^0.\ fff(A) = ff(A).$$

En effet on a

$$ff(A) = f(A)+\overline{(f(A))_1} = A+\overline{A}_1+\overline{(A+\overline{A}_1)_1} = A+\overline{A}_1+\overline{(A_1+\overline{A})} =$$
$$= A+\overline{A}_1+\overline{A}_1+\overline{A} = \overline{A}+\overline{A}_1$$

$$fff(A) = \overline{A}+\overline{A}_1+\overline{(\overline{A}+\overline{A}_1)_1} = \overline{A}+\overline{A}_1+\overline{\overline{A}_1+\overline{A}} = ff(A).$$

II. Soit $K$ un système à composition associative et soit

$$A = (a,\ b,\ \ldots,\ l)$$

un complexe quelconque, c'est-à-dire un sousensemble quelconque de $K$. Posons

$$f(A) = (a,\ b,\ \ldots,\ l,\ a^2,\ b^2,\ \ldots,\ l^2).$$

En posant $f(0) = 0$, on vérifie de suite les règles suivantes :

$1^0.\ f(0) = 0.$

$2^0.\ A < f(A).$

$3^0.\ f(A)+f(B) = f(A+B).$

En effet soit

$$A = (a,\ b,\ \ldots\ l) \qquad B = (\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \mu)$$

$$f(A+B) = (a,\ b,\ \ldots,\ l,\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \mu,\ a^2,\ b^2,\ \ldots,\ l^2,\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \ldots,\ \mu^2) =$$
$$= f(A)+f(B).$$

Si pour tout élément $a$ on a encore

$$a^{n+1} = a^p \qquad (p \leq n)$$

(condition qui ne porte que sur le quasicycle généré par chaque élément) on a

$$4^0.\quad \underbrace{ff\ldots.f}_{n\text{ fois}}(A) = \underbrace{ff\ldots.f}_{n+1\text{ fois}}(A).$$

III. Soit $K$ un système associatif. Appelons $f(A)$ le plus petit sous-système qui contient $A$ (c'est-à-dire le produit de tous les soussystèmes qui sont $> A$). Avec une convention convenable pour $f(0)$, on obtient les règles de calcul suivantes :

$1^0.\ f(A) = 0$

$2^0.\ A < f(A)$

$3^0.\ f(A) + f(B) < f(A + B)$

$4^0.\ ff(A) = f(A)$.

IV. Soit enfin $E$ un ensemble quelconque. Construisons sur $E$ une solution de l'équation

$$\underbrace{ff\ldots f}_{n+1 \text{ fois}}(x) = \underbrace{ff\ldots f}_{n \text{ fois}}(x),$$

ce qu'on peut faire de la manière suivante :

Soit $A_n < A_{n-1} < \ldots < A_1 < E$ une suite de $n$ sousensembles croissants et autrement arbitrairement choisis. Si $x < A_n$, posons $f(x) = x$; si $x < A_{n-1} - A_n$, posons $f(x) = y$ où $y < A_n$; si $x < A_{n-i} - A_{n-i+1}$, posons $f(x) = y$ où $y < A_{n-i+1} - A_{n-i+2}$, ..., si $x < E - A_1$ posons $f(x) = y$ où $y < A_1 - A_2$; il est évident que la fonction ainsi construite est une solution de l'équation fonctionnelle.

Soit maintenant $B < E$ et $f(B)$ l'image de $B$ par $f(x)$. Prenons

$$F(B) = B + f(B).$$

Avec une convention évidente pour $F(0)$, on obtient les règles de calcul suivantes :

$1^0.\ F(0) = 0$

$2^0.\ A < F(A)$

$3^0.\ F(A + B) = F(A) + F(B)$.

En effet on a

$$F(A+B) = A+B+f(A+B) = A+B+f(A)+f(B).$$

$$4^0.\quad \underbrace{FF\ldots,F}_{n+1 \text{ fois}}(A) = \underbrace{FF\ldots,F}_{n \text{ fois}}(A).$$

4. Ces exemples montrent que pour obtenir une topologie plus souple, il faut affaiblir les axiomes III et IV des espaces $(K)$, mais on voit aussi que dans des cas importants la fermeture ne perd pas entièrement son caractère d'être stationnaire et il est loisible de supposer qu'après un certain nombre d'applications la fermeture devient stationnaire; pour plus de commodité nous supposerons encore que ce nombre est fini.

En fin de compte nous proposons, pour topologiser cette classe d'espaces $(V)$, les quatre axiomes suivants :

$$\text{I. } f(0) = 0$$
$$\text{II. } A < f(A)$$
$$\text{III. } f(A) + f(B) < f(A + B)$$
$$\text{IV. } \underbrace{ff \ldots f}_{n+1 \text{ fois}}(A) = \underbrace{ff \ldots f}_{n \text{ fois}}(A).$$

5. Nous démontrerons maintenant quelques règles de calcul pour un espace $E$ qui satisfait aux axiomes I–IV.

Commençons d'abord par remarquer qu'on peut numéroter les ensembles qu'on obtient à partir d'un ensemble $A$ par l'application répétée de l'opération $f$. Il suffit de remarquer que si l'on pose

$f_0(A) = A$, $f(A) = f_1(A)$, $ff(A) = f_2(A)$, . . . . , $ff \ldots f(A) = f_n(A)$,

il revient au même de dire qu'on applique $i + j$ fois l'opération $f$ sur $A$ ou $j$ fois la même opération sur $f_i(A)$. Avec cette notation, les axiomes III et IV s'écrivent

$$\text{III'. } f_1(A) + f_1(B) < f_1(A + B)$$
$$\text{IV'. } f_{n+1}(A) = f_n(A).$$

$1^0$. $f_1(E) = E$

$2^0$. Si $A < B$, alors

$$f_1(A) < f_1(B), f_2(A) < f_2(B), \ldots, f_n(A) < f_n(B).$$

On a $B + A = B$, donc (ax. III) $f_1(B) > f_1(A) + f_1(B)$, c'est-à-dire $f_1(A) < f_1(B)$ et par application répétée

$$f_1(f_1(A)) < f_1(f_1(B)) \text{ ou } f_2(A) < f_2(B), \text{ etc.}$$

$3^0$. $f_2(A + B) > f_2(A) + f_2(B), \ldots, f_n(A + B) > f_n(A) + f_n(B)$.

On a (ax. III)

$$f_1(A + B) > f_1(A) + f_1(B) \text{ et}$$
$$f_1(f_1(A + B)) > f_1(f_1(A) + f_1(B)) > f_1 f_1(A) + f_1 f_1(B) \text{ ou}$$
$$f_2(A + B) > f_2(A) + f_2(B), \text{ etc.}$$

$4^0$. $f_i(AB) < f_i(A) f_i(B)$.

$$AB < A \longrightarrow f_i(AB) < f_i(A)$$
$$AB < B \longrightarrow f_i(AB) < f_i(B), \text{ donc}$$

$4'^0$.
$$f_i(AB) < f_i(A) f_i(B).$$
$$f_i(AB \ldots L) < f_i(A) f_i(B) \ldots f_i(L).$$

$5^0$. $f_1(AB) < f_1(A) f_1(B) \rightleftarrows f_1(A + B) > f_1(A) + f_1(B)$.

En effet

$A(A+B) = A, B(A+B) = B, f_1(A) < f_1(A) f_1(A+B)$, $f_1(B) < f_1(B) \times$ $\times f_1(A+B)$, donc

$$f_1(A+B) > f_1(A) + f_1(B).$$

La réciproque est contenue dans le règle $4^0$. En résumé, l'axiome III peut être remplacé par

$$III_1.\ f_1(AB) < f_1(A) f_1(B).$$

$6^0$. $$f_i(E-A) > E - f_i(A).$$

On a

$$f_i(A) > A,$$
$$E - f_i(A) < E - A$$

et $f_i(E-A) > A-E$, donc $f_i(E-A) > E - f_i(A)$.

Appelons ensemble fermé d'ordre *1* tout $A$ pour lequel $A = f_1(A)$ et, généralement, ensemble fermé d'ordre $i$ tout $A$ pour lequel

$$f_{i-1}(A) = f_i(A).$$

$7^0$. *$f_i(A)$ est fermé d'ordre $n+1-i$.*

C'est une conséquence immédiate de l'axiome IV.

$8^0$. *Le produit de deux ensembles fermés d'ordre 1 est un ensemble fermé d'ordre 1.*

On a

$$f_1(AB) < f_1(A) f_1(B) = AB \text{ et}$$
$$f_1(AB) > AB, \text{ donc}$$
$$f_1(AB) = AB = f_1(A) f_1(B).$$

$9^0$. *Si $A, B$, sont fermés d'ordre $i+1$ et si $f_i(AB) = f_i(A) f_i(B)$, alors $AB$ est fermé d'ordre $i+1$.*

$$f_{i+1}(AB) < f_{i+1}(A) f_{i+1}(B) = f_i(A) f_i(B) = f_i(AB) \text{ et}$$
$$f_{i+1}(AB) > f_i(AB), \text{ donc}$$
$$f_{i+1}(AB) = f_i(AB).$$

$10^0$. *Si $A$ et $E-B$ sont fermés d'ordre 1, $A-B$ est fermé d'ordre 1.*

$$A - B = A(E-B) \text{ et } f_1(A-B) = f_1(A) f_1(E-B) =$$
$$= A(E-B) = A - B.$$

Appelons ensemble ouvert d'ordre $i$ tout complémentaire d'un ensemble fermé d'ordre $i$.

$11^0$. *Si $A, B$, sont ouverts d'ordre 1, $A+B$ est ouvert d'ordre 1.*

$$f_1(E-(A+B)) = f_1((E-A)(E-B)) = f_1(E-A)\,f_1(E-B) =$$
$$= (E-A)(E-B) = E-(A+B).$$

12°. *Si A, B, sont ouverts d'ordre $i+1$ si $f_i(E-(A+B)) = f_i(E-A)\,f_i(E-B)$, $A+B$ est ouvert d'ordre $i+1$.*

$f_{i+1}(E-(A+B)) < f_{i+1}(E-A)\,f_{i+1}(E-B) = f_i(E-(A+B))$ et, d'autre part, $f_{i+1}(E-(A+B)) > f_i(E-(A+B))$, donc $f_{i+1}(E-(A+B)) = f_i(E-(A+B))$.

Introduisons les fonctions d'ensemble

$$E_1(A) = E - f_1(A),\ E_2(A) = E - f_2(A),\ \ldots,\ E_n(A) = E - f_n(A),$$

qu'on peut appeler respectivement l'extérieur d'ordre $1, 2, \ldots, n$, de $A$.

13°. *Si A est fermé d'ordre $i+1$, $E_1(A)$ est ouvert d'ordre $i+1$ et*

$$E_i(A) = E_{i+1}(A) = \ldots = E_n(A).$$

La première partie est une conséquence immédiate de la définition ; on démontre la seconde partie en observant qu'on a

$$f_{i+1}(A) = f_i(A),\ E - f_{i+1}(A) = E - f_i(A), \text{ c'est-à-dire}$$
$$E_{i+1}(A) = E_i(A) \text{ etc.}$$

14°. $E-A > E_1(A) > E_2(A) > \ldots > E_n(A)$.

On a $A < f_1(A) < f_2(A) < \ldots < f_n(A)$, donc $E-A > \ldots > E-f_1(A), > \ldots > E-f_n(A)$.

Corollaire. $AE_i(A) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

15°. $E_i(A+B) < E_i(A)\,E_i(B)$.

On a $E_i(A+B) = E - f_i(A+B)$ et

$$f_i(A+B) > f_i(A) + f_i(B), \text{ donc}$$
$$E_i(A+B) < E - (f_i(A) + f_i(B)) = (E-f_i(A))(E-f_i(B)) =$$
$$= E_i(A)\,E_i(B).$$

16°. *Si $A < B$, alors $E_i(A) > E_i(B)$* $\quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

On a $f_i(A) < f_i(B)$, donc $E - f_i(A) > E - f_i(B)$ ou $E_i(A) > E_i(B)$.

17°. $E_i(AB) > E_i(A) + E_i(B)$.

$A = A + AB$, $B = B + AB$, donc $E_i(A) < E_i(A)\,E_i(AB)$, $E_i(B) < E_i(B)\,E_i(AB)$ ou $E_i(AB) > E_i(A)$, $E_i(A) > E_i(B)$, ou enfin $E_i(AB) > E_i(A) + E_i(B)$.

18°. $E_i(f_j(A)) = E_{i+j}(A)$.

$E_i(f_j(A)) = E - f_i(f_j(A)) = E - f_{i+j}(A) = E_{i+j}(A)$.

Corollaire. On a les règles suivantes:

$$E_i(f_j(A) + f_k(B)) < E_{i+j}(A)\,E_{i+k}(B).$$
$$E_i(f_j(A)\,f_k(B)) > E_{i+j}(A) + E_{i+k}(B).$$
$$E_i(f_j(A)) + E_k(f_l(A)) = E_{\min(i+j,\,k+l)}(A).$$

19°. $f_j(E_i(A)) = f_j(E - f_i(A))$.

Corollaire. $f_j(E_i(A)) < f_j(E_{i-1}(A)) < \ldots < f_j(E - A)$.

Dénommons intérieur d'ordre $i$ de $A$ la fonction

$$I_i(A) = E - f_i(E - A).$$

20°. $A > I_1(A) > I_2(A) > \ldots > I_n(A) = I_{n+1}(A)$.

21°. $I_k(f_l(A)) > I_k(f_{l-1}(A))$.

En effet on a $f_l(A) > f_{l-1}(A)$, $E - f_l(A) > E - f_{l-1}(A)$, $f_k(E - f_l(A)) < f_k(E - f_{l-1}(A))$.

$E - f_k(E - f_l(A)) > E - f_k(E - f_{l-1}(A))$ ou

$$I_k(f_l(A)) > I_k(f_{l-1}(A)).$$

22°. *Si* $A < B$, *alors* $I_l(A) < I_l(B)$ *et aussi* $I_l(f_k(A)) < I_l(f_k(B))$.

En effet on a

$$f_k(A) < f_k(B),\ E - f_k(A) > E - f_k(B),$$
$$f_l(E - f_k(A)) > f_l(E - f_k(B)),$$

$E - f_l(E - f_k(A)) < E - f_l(E - f_k(B))$ ou $I_l(f_k(A)) < I_l(f_k(B))$.

23°. $I_i(AB) < I_i(A)\,I_i(B)$.

$I_i(AB) = E - f_i(E - AB)$, $f_i(E - AB) > f_i(E - A) + f_i(E - B)$, donc

$$I_i(AB) < E - (f_i(E - A) + f_i(E - B)) =$$
$$= (E - f_i(E - A))(E - f_i(E - B)) = I_i(A)\,I_i(B).$$

24°. $I_i(f_j(A)\,f_k(B)) < I_i(f_j(A))\,I_i(f_k(B))$.

C'est une conséquence immédiate de l'égalité

$$I_i(f_j(A)\,f_k(B)) = E - f_i(E - f_j(A)\,f_k(B)) =$$
$$= E - f_i((E - f_j(A)) + (E - f_k(B))).$$

25°. $I_i(A + B) > I_i(A) + I_i(B)$.

$$I_i(A+B) = E - f_i(E - (A + B)) = E - f_i((E - A) \times$$
$$\times (E - B)) > (E - f_i(E - A)) + (E - f_i(E - B)) = I_i(A) + I_i(B).$$

26°. *Si* $A > C$, $B > D$, *alors* $I_i(A+B) > I_i(C) + I_i(D)$.

En effet on a $I_i(A+B) > I_i(A) + I_i(B) > I_i(C) + I_i(D)$.

27°. $I_1(I_1(A)) < I_1(A)$.

Introduisons enfin la fonction

$$F_i(A) = f_i(A) f_n(E-A),$$

qu'on peut appeler frontière d'ordre $i$.

28°. $F_i(A) < F_{i+1}(A)$,

$f_i(A) < f_{i+1}(A)$ implique $f_i(A) f_n(E-A) < f_{i+1}(A) f_n(E-A)$.

29°. $F_i(E-A) < F_n(A) = F_n(E-A)$.

$F_i(E-A) = f_i(E-A) f_n(A) < f_n(E-A) f_n(A) = F_n(A) = F_n(E-A)$.

30°. $F_i(E-AB) > f_i(E-A) f_n(AB) + f_i(E-B) f_n(AB)$.

31°. $f_i(F_j(A)) < F_{i+j}(A)$.

$f_i(F_j(A)) = f_i(f_j(A) f_n(E-A)) < f_{i+j}(A) f_n(E-A) = F_{i+j}(A)$.

32°. $F_j(f_i(A)) > F_{i+j}(A)$.

$F_j(f_i(A)) = f_j(f_i(A)) f_n(E - f_i(A)) = f_{i+j}(A) f_n(E-f_i(A)) > f_{i+j}(A) f_n(E-f_{i+j}(A)) = F_{i+j}(A)$.

33°. $A+F_i(A) = f_i(A)$.

$A+F_i(A) = A+f_i(A) f_n(E-A)$, $E-(A+F_i(A)) = (E-A) \times (E - f_i(A) f_n(E-A)) = (E-A)(E-f_i(A)) + (E-A) \times (E-f_n(E-A))$, mais $f_n(E-A) > E-A$, $E-f_n(E-A) < A$, $(E-A)(E-f_n(E-A)) = 0$ et $A < f_i(A)$, $E-A > E-f_i(A)$, donc $(E-A)(E-f_i(A)) = E-f_i(A)$. En définitive

$$E-(A+F_i(A)) = E-f_i(A), \text{ c'est-à-dire}$$

$$A+F_i(A) = f_i(A).$$

34°. *Si* $A < F_i(A)$ *alors* $F_i(A) = f_i(A)$ *et réciproquement.*

$A < F_i(A) \rightarrow A+F_i(A) = F_i(A) = f_i(A)$ (règle 33°).

$F_i(A) = f_i(A) > A$ (axiome II).

35°. *Si* $A < F_i(A)$, $f_n(E-A) = E$ *et réciproquement.*

On a (règle 34°) $F_i(A) = f_i(A) f_n(E-A) = f_i(A)$, donc $f_i(A) < f_n(E-A)$ ou $f_n(E-A) > A$, donc $f_n(E-A) = E$. D'autre part

$$f_n(E-A) = E \rightarrow F_i(A) = f_i(A) > A \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

36°. *Si* $A = F_i(A)$ *alors* $A = f_1(A)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$A = F_i(A) \rightarrow f_n(E - A) = E \rightarrow F_i(A) = f_i(A) = A$; mais $f_i(A) > f_{i-1}(A) > \ldots > f_1(A) > A$, donc $A = f_1(A)$ et $A = F_1(A) = F_2(A) = \ldots = F_n(A)$.

37⁰. $f_i(F_n(A)) = F_n(A)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$f_1(F_n(A)) = f_1(f_n(A) f_n(E-A)) < f_n(A) f_n(E - A) = F_n(A)$ et $f_1(F_n(A)) > F_n(A)$, donc $f_1(F_n(A)) = F_n(A)$ et, en général,

$$f_i(F_n(A)) = F_n(A), \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

38⁰. $f_n(E - F_n(A)) = E \rightarrow F_n(F_n(A)) = F_n(A)$ *et réciproquement.*

$F_n(F_n(A)) = f_n(F_n(A)) f_n(E-F_n(A)) = f_n(F_n(A)) = F_n(A)$ regle 37⁰). Si $F_n(F_n(A)) = F_n(A)$, on applique les règles 36⁰ et 35⁰ à l'ensemble $F_n(A)$.

39⁰. $F_n(A) < A \rightarrow F_n(F_n(A)) = F_n(A)$.

$F_n(A) < A \rightarrow A + F_n(A) = A = f_n(A) = f_1(A)$ (règle 33), donc $f_n(E-F_n(A)) > f_n(E-A) + f_n(E - f_n(E-A)) = E$ et (règle 38⁰) $F_n(F_n(A)) = F_n(A)$.

40⁰. *On a toujours*

$$F_n(F_n(F_n(A))) = F_n(F_n(A)).$$

Posons $F_n(A) = B$. On a

$$F_n(B) = f_n(B) f_n(E-B) = f_n(F_n(A)) f_n(E-F_n(A))$$

donc, par application de la règle 37⁰

$F_n(B) = F_n(A) f_n(E-F_n(A))$ et $F_n(B) < F_n(A) = B$. En appliquant ensuite la règle 39⁰ à l'ensemble $B$ on obtient l'égalité de l'énoncé.

41⁰. $F_n(F_n(A)) = f_1(F_n(F_n(A)))$, $f_n(E - F_n(F_n(A))) = E$

Posons $F_n(F_n(A)) = B$ et observons qu'on a $F_n(B) = B$ (règle 40⁰) donc (règles 37⁰ et 36⁰) $B = f_1(B)$, $f_n(E-B) = E$, c'est-à-dire

$$F_n(F_n(A)) = f_1(F_n(F_n(A))),$$
$$f_n(E - F_n(F_n(A))) = E.$$

## Travaux cités

1. Albuquerque, J. - *La notion de bord en topologie.* Portugaliae Math. vol. 3, 1942, p. 185.

2. Appert, A. - *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux.* T. I. et II, Paris, 1934.

3. Appert, A. – *Sur quelques notions susceptibles d'être prises comme terme primitif dans la théorie des espaces abstraits.* Mathematica (Cluj), v. 11, 1935, p. 229.
4. „ „ – *Sur les topologies transitives.* Bull. de la Classe des Sciences de l'Académie de Belgique, (5), vol. XXIII, 1937 p. 135.
5. Destouches, Jean-Louis – *Les espaces à caractère fini.* C. R. vol. 204, 1937, p. 219.
6. Fréchet, M. – *Les espaces abstraits.* Paris 1928.
7. Hausdorff, F. – *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig 1914.
8. Kuratowski, C. – *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis Situs.* Fundamenta Math. t. III. 1922, p. 189.
9. „ „ – *Topologie I.* Warszawa-Lwów, 1934.
10. Moore, E. H. – *On a form of general analysis with application to linear differential and integral equations.* Atti del IV. Congresso dei Matematici (Roma 1908), vol. II, p. 98.
11. Sierpiński, W. – *La notion de dérivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits.* Math. Ann. Bd. 97, 1927, p. 321.
12. „ – *Introduction to general topology.* Toronto 1934.
13. Szymanski, P. – *La notion des ensembles séparés comme terme primitif de la topologie.* Mathematica (Cluj-Timişoara), vol. 17, 1941, p. 65.
14. Weyl, H. – *Die Idee der Riemannschen Fläche.* Leipzig und Berlin, 1913.
15. Zarycki, M. – *Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la logique.* Fund. Math vol. IX, 1927, p. 6.
16. „ „ – *Über den Kern einer Menge.* Jber. Deutscher Math. Vereinigung, v. 39, 1930, p. 154.

*Séminaire Mathématique*
*de l'Ecole Polytechnique*
*de Jassy*

*(Reçu le 1 Septembre 1946)*

# ECUAȚII ITERALE LINEARE DE ORDINUL AL DOILEA CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

**O scrisoare adresată d-lui A. Climescu**

de

**A. MYLLER**

Am discutat asupra ecuațiilor iterale lineare cu coeficienți constanți luând exemplul simplu al celor de ordinul al doilea

$$f(f(x)) = p\,f(x) + q\,x \tag{1}$$

care, lucru curios, se pare că n'au fost încă complect studiate. Mi-ai vorbit de o cale de a determina infinit de multe puncte $(x,y)$ ale curbei

$$y = f(x) \tag{2}$$

ce reprezintă soluția. Metoda D-tale poate conduce și la a determina soluții algebrice ale ecuației (1).

Spre exemplu scriind ecuația (1) sub forma

$$f(y) = p\,y + q\,x \tag{3}$$

rezultă că, dacă punctul cu coordonatele $(x,y)$ se află pe curba (2), tot pe aceiași curbă se află și punctul cu coordonatele $(y, p\,y + q\,x)$. Determinând deci coeficienții ecuației

$$a_0 + a_1x + b_1y + a_2x^2 + 2\,b_2\,xy + c_2y^2 + a_3\,x^3 + \\ + 3\,b_3\,x^2y + \ldots = 0 \tag{4}$$

prin condiția ca ea să rămână satisfăcută și de coordonatele $y, py+qx$ și rezolvând-o apoi în raport cu $y$, se poate obține soluții ale ecuației (1).

Condiția dă

$$\frac{a_0}{a_0} = \frac{b_1q}{a_1} = \frac{a_1 + b_1p}{b_1} = \frac{c_2q^2}{a_2} = \frac{(b_2 + c_2p)\,q}{b_2} = \\ = \frac{a_2 + 2b_2p + c_2p^2}{c_2} = \ldots = \varrho. \tag{5}$$

Aranjând aceste ecuații în grupe corespunzătoare coeficienților termenilor de același grad, avem :

$$(6) \qquad (1-\varrho)\,a_0 = 0$$

$$(7) \qquad -\varrho\,a_1 + q\,b_1 = 0 \qquad\qquad a_1 + (p-\varrho)\,b_1 = 0$$

$$(8) \qquad \begin{matrix} -\varrho\,a_2 + q^2\,c_2 = 0 & (q-\varrho)\,b_2 + p\,q\,c_2 = 0 \\ a_2 + 2p\,b_2 + (p^2-\varrho)\,c_2 = 0 \end{matrix}$$

---

Soluțiile $a_0$ ; $a_1, b_1$ ; $a_2, b_2, c_2$ ; . . . . ale acestor grupe de ecuații omogene sunt diferite de zero când determinanții corespunzători sunt nuli :

$$(9) \qquad \varrho - 1 = 0$$

$$(10) \qquad \varrho^2 - p\varrho - q = 0$$

$$(11) \qquad (\varrho + q)[\varrho^2 - (p^2 + 2q)\,\varrho + q^2] = 0$$

---

și ele sunt :

$$(12) \qquad a_0 = a_0$$

$$(13) \qquad a_1 = \frac{q}{\varrho}\,b_1 \qquad\qquad b_1 = b_1$$

$$(14) \qquad a_2 = \frac{q^2}{\varrho}\,c_2 \qquad b_2 = \frac{p\,q}{\varrho - q}\,c_2 \qquad c_2 = c_2.$$

---

*Soluții reprezentate prin curbe de ordinul 1* se obțin din (4) în 2 moduri :

1. Făcând $a_0 = 0, a_2 = b_2 = c_2 = a_3 = b_3 = \ldots = 0$ și satisfăcând (10). Ele sunt :

$$(15) \qquad y = \varrho_1\,x \qquad\qquad y = \varrho_2\,x$$

unde $\varrho_1, \varrho_2$ sunt rădăcinile ecuației (10).

2. Făcând $a_2 = b_2 = c_2 = a_3 = b_3 = \ldots = 0$ și satisfăcând (9) și (10). In acest caz :

$$(16) \qquad p + q - 1 = 0$$

iar (1) devine :

$$(17) \qquad f(f(x)) = (1-q)\,f(x) + q\,x.$$

Avem pentru această ecuație particulară (17) o infinitate de soluții

(18) $$y + qx + k = 0,$$

$k$ fiind o constantă arbitrară, precum și soluția

(19) $$y = x.$$

*Soluții reprezentate prin curbe de ordinul 2* se obțin în 2 moduri :

1. Făcând $a_1 = b_1 = 0$, $a_3 = b_3 = \ldots = 0$ și satisfăcând (9) și prima din ecuațiile (11). Rezultă

(20) $$q = -1$$

iar (4) se reduce la conica cu centru

(21) $$x^2 - pxy + y^2 - \frac{k}{4} = 0,$$

$k$ fiind o constantă arbitrară. Ecuația (1) devine

(22) $$f(f(x)) = p\,f(x) - x$$

iar soluțiile sunt :

(23) $$y = \frac{1}{2}\left[px \pm \sqrt{(p^2 - 4)x^2 + k}\right].$$

2. Făcând $a_0 = 0$, $a_3 = b_3 = \ldots = 0$ și satisfăcând ecuația (10) și a doua din ecuațiile (11). Condiția ca aceste ecuații să aibă o rădăcină comună e :

(24) $$p^3 + 3pq - q^2 + q = 0$$

sau

(25) $$p = q^{2/3} - q^{1/3}$$

iar rădăcina comună e :

(26) $$\varrho = q^{2/3}.$$

Ecuația (4) devine

(27) $$\left(y - q^{1/3}x\right)^2 - 2k\left(y + q^{1/3}x\right) = 0$$

iar (1)

(28) $$f(f(x)) = \left(q^{2/3} - q^{1/3}\right)f(x) + qx = 0.$$

Soluțiile sunt parabolele

(29) $$y = q^{2/3}x + k \pm \sqrt{2k\left(q^{2/3} - q^{1/3}\right)x + k^2}\,.$$

Celelalte combinații asupra coeficienților și ecuațiilor (9), (10), (11), ce se pot forma în scopul ca expresia (4) să fie de gradul 2, conduc fie la 2 drepte din cele cunoscute, fie la o curbă a cărei ecuație rezolvată în raport cu $y$, dă o determinație ce nu verifică, independent de cealaltă, ecuația (1).

Și se poate continua și obține, poate, în forma de sus rezultatul general al D-lui Spiess din *Math. Ann.* 62.

## EQUATIONS ITÉRALES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

par

**A. MYLLER**

*(Résumé)*

Dans une lettre adressée à M. A. Climescu l'auteur montre, comme résultat d'une conversation, qu'on peut obtenir des solutions $y = f(x)$ d'une équation itérale linéaire du second ordre à coefficients constants en partant de l'observation qu'elles restent inaltérées, quand on échange $x$ et $y$ respectivement en $y$ et $py + qx$. On calcule effectivement des solutions algébriques d'ordre 1 et 2.

*Séminaire Mathématique*
*de l'Université de Jassy*

*(Reçu le 20 Octobre 1946).*

# SUR LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

par

O. MAYER

Il s'agit ici du théorème fondamental de Cauchy énoncé sous les conditions suivantes:

*Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le domaine $D$ intérieur à une courbe $C$ simple, fermée et rectifiable, et qu'elle est finie et continue dans $\bar{D} = D + C$, alors*

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \tag{1}$$

Du théorème ainsi formulé nous connaissons deux démonstrations, dues à S. Pollard [1]) et à E. Čech [2]). La première, dont le principe nous paraît le plus simple [3]), s'appuie sur certaines propositions de Ch. de la Vallée-Poussin [4]) concernant les chaînes de régions limitées par des polygones.

Nous avons jugé désirable de l'affranchir de ces prémisses (dont la démonstration présente des difficultés) et d'en préciser quelques points.

Comme nous poursuivons avant tout un but didactique, nous n'omettrons aucun détail de la démonstration et nous supposerons un minimum de connaissances préalables, à savoir: la théorème de Jor-

---

1) London Math. Soc. (2), 21 (1923), pp. 456-82.

2) Rend. Lincei (6), 11 (1930), pp. 884-87. Une autre démonstration due au même Auteur nous semble incomplète: il n'est pas prouvé que les points $v_\nu$, considérés sur la courbe $C$, s'y suivent dans le même sens et dès lors on ne peut pas affirmer - comme l'exigerait l'inégalité finale - que la somme des longueurs absolues des arcs $v_\nu\, v_{\nu+1}$ est égale à la longueur de $C$.

3) Elle consiste en somme à approximer autant que l'on veut l'intégrale (1), par des intégrales de $f(z)$ prises sur des polygones compris dans $D$.

4) Cours d'Analyse I, éd. 3 (1914), pp. 375-77.

d a n [1]), quelques propositions élémentaires sur les régions planes et les courbes rectifiables, et le théorème de C a u c h y pour un rectangle (compris dans le domaine d'holomorphie), avec son extension immédiate aux polygones de côtés parallèles aux axes.

D é m o n s t r a t i o n 1°. Soit $w$ un point dans $D$ et $\delta = \operatorname{dist}(w, C)$.

2°. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il existe un nombre $0 < \eta < \delta$, tel que

$$|f(z') - f(z)| < \varepsilon \qquad \text{pour } |z' - z| < \eta \text{ dans } \bar{D}.$$

3°. Soit $s = s(C)$ la longueur de $C$. Divisons $C$ en $n > 2\frac{s}{\eta}$, 4 arcs $C_k = a_{k-1}\, a_k$ $(k = 1, \ldots, n;\ a_n = a_0)$, de même longueur : $s(C_k) = \frac{s}{n}$.

4°. Subdivisons — d'une manière que nous préciserons plus loin (8°) — chaque $C_k$ en des arcs $C_{kj}$ $(j = 1, \ldots, m;\ m > 2)$ se succédant dans le sens $a_{k-1} \longrightarrow a_k$. Soit $c_{kj}$ le milieu de $C_{kj}$ et $s_{kj} = s(C_{kj})$.

5°. Attachons à chaque $C_{kj}$ un carré ouvert, $Q_{kj}$, de centre $c_{kj}$ et dont les côtés, parallèles aux axes, soient de longueur $l_{kj} = \frac{5}{4} s_{kj}$. Alors

$$C_{kj} \subset Q_{kj}.$$

Car pour tout $z \subset C_{kj}$ on a

$$|c_{kj} - z| \leq \frac{1}{2} s_{kj} = \frac{2}{5} l_{kj} < \frac{1}{2} l_{kj}.$$

6°. Deux carrés consécutifs, $Q'$ et $Q''$, empiètent.

En effet

$$|c' - c''| \leq \frac{1}{2}(s' + s'') = \frac{2}{5}(l' + l'') < \frac{1}{2}(l' + l'').$$

7°. Soient : $R_k$ la somme de carrés $\Sigma_j Q_{kj}$ augmentée des points frontière communs à deux carrés d'indice $k$ adjacents (mais non consécutifs !), exception faite pour les sommets ; et $R = \Sigma R_k$.

$R_k$ et $R$ sont des régions (6°) et on a (5°)

$$C_k \subset R_k, \quad C \subset R.$$

8°. On peut opérer la subdivision 4° de manière que :

1. Deux régions $R_k$, $R_h$ non consécutives soient séparées : $R_k \cdot \bar{R}_h = 0$.

1) Parmi les nombreuses preuves qu'on a données de ce théorème, celle de M. E. Č e c h (Rend. Lincei (6), 12, pp. 386-88) se distingue par sa simplicité.

2. Deux régions consécutives aient comme intersection :

$$R_k \cdot R_{k+1} = Q_{km} \cdot Q_{k+1,1} \neq 0.$$

Remarquons d'abord que, si deux carré $\overline{Q}', \overline{Q}''$ ont un point commun $\zeta$, nous avons ($5^0$)

$$(2) \quad |c' - c''| \leq |c' - \zeta| + |c'' - \zeta| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}(l' + l'') < s' + s''.$$

Si donc $\varrho_0$ est la plus petite distance entre deux $C_k$ non consécutifs, on satisfera à 1. en prenant $s_{kj} < \frac{1}{2}\varrho_0$.

Pour assurer la condition 2., on procèdera comme il suit : Fixons provisoirement dans chaque $C_k$, un arc $C'_k$ plus petit, d'extrémité $a_{k-1}$ commune ; et soit

$$\varrho_1 = \text{min dist}\,(C_{k-1},\ C_k - C'_k).$$

Prenons les arcs $C_{km} \subset C_k - C'_k$ et tels que $s_{km} < \frac{1}{2}\varrho_1$. Cela fait, soit encore

$$\varrho_2 = \text{min dist}\,(C_{k+1},\ C_k - C_{km})$$

et prenons les $C_{k1}$ de longueur $s_{k1} < \frac{1}{2}\varrho_1, \frac{1}{2}\varrho_2$. Enfin soit

$$\varrho_3 = \text{min dist}\,(C_k - C_{k1} - C_{km},\ C_{k+1} - C_{k+1,1} - C_{k+1,m})$$

et divisons les portions qui restent des arcs $C_k$ en arcs de longueur $s_{kj} < \frac{1}{2}\varrho_1, \frac{1}{2}\varrho_2, \frac{1}{2}\varrho_3$ $(j \neq 1,m)$. On voit alors facilement, à l'aide de (2), que

$$(3) \qquad \overline{Q}_{kj} \cdot Q_{k+1,j'} = 0 \qquad \text{pour } j \neq m \text{ ou } j' \neq 1.$$

Ceci prouve 2.

$9^0$. Posons

$$B_k = Q_{k-1,m} \cdot \text{fr}\, Q_{k1},\ B'_k = Q_{k+1,1} \cdot \text{fr}\, Q_{km}.$$

D'après $6^0$ et $8^0$, 1,

$$B_k \neq 0,\ B'_k \neq 0,\ \overline{B}_k \cdot \overline{B}'_k = 0.$$

$10^0$. On a

$$B_k = R_{k-1} \cdot \text{fr}\, R_k,\ B'_k = R_{k+1} \cdot \text{fr}\, R_k.$$

En effet, puisque $\text{fr}\, R_k \subset \Sigma_j \text{fr}\, Q_{kj}$, un point frontière de $R_k$ ne peut, d'après (3), appartenir à $R_{k-1}$ sans appartenir à $\text{fr}\, Q_{k1}$ et par

suite à $Q_{k-1,m}$, donc à $B_k$. Et, d'autre part, tout point de $B_k$ étant dans $R_{k-1}$, mais non dans $Q_{k1}$, ne peut se trouver dans $R_k$ ($8^0$, 2); il sera donc dans fr $R_k$ (étant point limite de $R_k$).

$11^0$. Fr $R_k$ se compose de polygones simples en nombre fini, dont les côtés appartiennent aux contours des carrés $Q_{kj}$ et qui ont tout au plus des sommets communs [1]).

Un point frontière d'un carré a pour voisinage dans ce carré, un secteur circulaire d'ouverture $\frac{1}{2}\pi$ ou $\pi$ (suivant qu'il est un sommet ou non). Il en résulte, vu la définition $7^0$, qu'un point frontière de $R_k$ a pour voisinage dans $R_k$, un secteur d'ouverture $\frac{1}{2}\pi$, $\pi$, ou $\frac{3}{2}\pi$, ou bien deux secteurs d'angle $\frac{1}{2}\pi$ opposés au sommet. Dans le second cas, $z$ est intérieur à *un* segment frontière de $R_k$; dans les cas premier et troisième, il est l'extrémité commune de 2 segments frontière; et il l'est de 4 segments frontière dans le dernier cas (qui est exceptionnel); $z$ est alors un noeud pour fr $R_k$. Nous pouvons parcourir la fr $R_k$ en passant d'un segment à un autre à extrémité commune, et cela sans ambiguité si nous convenons qu'à chaque noeud on change de direction et de carré. Les segments frontière étant en nombre fini, on formera ainsi des polygones simples et ne se touchant deux à deux qu'aux noeuds.

$12^0$. Parmi les polygones précédents il y en a un seul, soit $P_k$, qui contient en son intérieur $R_k$ et les autres polygones frontière, à l'éventuelle exception de noeuds.

Ce sera le dernier polygone rencontré par une demi-droite issue de $R_k$ et évitant les sommets des carrés composants. Il est d'ailleurs unique parce que deux polygones simples ne sauraient se contenir mutuellement.

$13^0$. $\quad |a_k - \zeta| < 2\frac{s}{n} < \eta \qquad$ pour $\zeta \subset \overline{R}_k$.

Car, si $\zeta \subset \overline{Q}_{kj}$, on a ($5^0$, $3^0$)

$$|a_k - \zeta| \leq |a_k - c_{kj}| + |c_{kj} - \zeta| < \frac{s}{n} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, l_{kj} < 2\frac{s}{n} < \eta.$$

$14^0$. Il en résulte, vu que $|a_k - w| \geqslant \delta > \eta$ ($1^0$, $2^0$):

$$w \subset \text{ext } P_k, \quad \text{d'où } w \subset \text{ext } R.$$

1) C'est une proposition bien connue; nous faisons suivre sa démonstration pour la commodité du lecteur.

15⁰. $B_k \subset P_k$ , $B'_k \subset P_k$.

Considérons, en effet, la somme $R^*$ des carrés $Q$ sauf ceux de $R_k$ et $Q_{k+1,1}$, $Q_{k-1,m}$. C'est une région (6⁰) qui ne peut être qu'extérieure ou intérieure à $P_k$, puisque les carrés qui la composent sont séparés de $R_k$ (8⁰).

Dans le premier cas, $R_{k+1}$ ayant des points tant intérieurs qu'extérieurs à $P_k$, en a aussi sur $P_k$, donc $B_k \cdot P_k \neq 0$ (10⁰). Il en résulte même $B_k \subset P_k$, parce que $B_k$ ne peut pas contenir des noeuds (car $B_k \subset Q_{k+1,1}$ ne touche à aucun autre carré de $R_k$ que $Q_{k,m}$). Et on aura pareillement $B'_k \subset P_k$.

Le second cas ($R^* \subset$ int $P_k$) est impossible: il existerait alors, dans fr $R_k$, un polygone $P'_k \neq P_k$, séparant $R_k$ de $R^*$ (le premier rencontré sur un chemin allant de $R_k$ à $R^*$ dans int $P_k$). Et on en déduirait comme plus haut $B_k + B'_k \subset P'_k$. Mais $Q_{k+1,1}$ et $Q_{k-1,m}$ ne sauraient être tous les deux $\subset$ int $P_k$, car alors on aurait $R \subset$ int $P_k$ et $C \subset$ int $P_k$ (7⁰), donc $D \subset$ int $P_k$, contrairement à 14⁰. Donc p. ex. $Q_{k+1,1}$ aura des points à l'intérieur et à l'extérieur de $P_k$, d'où il résulterait comme plus haut $B_k \subset P_k$, en contradiction avec $B_k \subset P'_k$.

16⁰. D'après 9⁰ et 15⁰ nous pouvons écrire:

$$P_k = B_k + \bar{A}_k + B'_k + \bar{A}'_k$$

où les termes de la somme sont des lignes polygonales simples et disjointes. De plus, selon 10⁰ et 8⁰, 1, les $A_k$, $A'_k$ ($k = 1, \ldots, n$) sont disjointes de $R$ et entre elles.

17⁰. Désignons par $b_k$, $b'_k$ les extrémités de $B'_k$ et de $B_{k+1}$ (intersections de fr $Q_{k\,m}$ et fr $Q_{k+1,1}$; v. 9⁰). Ce sont aussi des extrémités pour $A_k$ ou $A'_k$ et pour $A_{k+1}$ ou $A'_{k+1}$ (16⁰).

Soient: $b_k$ et $b_{k+1}$ les extrémités de $A_{k+1}$; $b_{k+1}$ et $b_{k+2}$ celles de $A_{k+2}$; etc. Alors, la première extrémité de $A_k$ étant $b_{k-1}$, la seconde devra être $b_k$ (et non $b'_k$).

En effet, dans le cas contraire, les $\bar{A}_k$ et $\bar{A}'_k$ formeraient un seul polygone simple et disjoint de $R$ (16⁰):

$$b_k\, b_{k+1} \ldots b_{k-1}\, b'_k\, b'_{k+1} \ldots b'_{k-1}\, b_k.$$

L'une des régions déterminées par ce polygone contiendra $R$ et les transversales $B_{k+1}$, $B'_{k+1}$. Mais comme les couples d'extrémités

$b_k\,b'_k$ et $b_{k+1}\,b'_{k+1}$ se séparent (sur ce polygone), $B_{k+1}$ et $B'_{k+1}$ se couperaient, contrairement à $9^0$. Donc :

$\Pi = \Sigma\,\bar{A}_k$ et $\Pi' = \Sigma\,\bar{A}'_k$ sont deux polygones simples et disjoints.

$18^0$. L'un de ces polygones se trouve dans $D$, soit $\Pi \subset D$.

En effet : Puisque $R$ intersecte $D$ (au voisinage de $C$) et que $w \subset \text{ext}\,R$ ($14^0$), il y a dans $D$ un chemin (polygonal) allant de $w$ à un point de $R$ et qui traverse fr $R$ en un premier point $u$. Supposons que ce chemin y pénètre dans $R_k$. Comme $w \subset \text{ext}\,P_k$ et que $P_k$ est justement le polygone extérieur de fr $R_k$, il s'ensuit $u \subset P_k$. Mais $u$ ne peut appartenir à $B_k$ ni à $B'_k$ (qui sont dans $R$) ; donc $u \subset \bar{A}_k$ ou $\bar{A}'_k$ ($16^0$). En supposant le premier cas, c'est le polygone $\Pi$ qui contient le point $u$ de $D$ et comme il est disjoint de $C = \text{fr}\,D$ ($\subset R$), on aura bien $\Pi \subset D$.

$19^0$. Posons

$$\varphi(z) = \begin{cases} f(z) & \text{sur } C \text{ et } \Pi\ (\subset \bar{D}) \\ \dfrac{f(a_k)-f(b_k)}{a_k - b_k}\,(z - a_k) + f(a_k) & \text{sur les segments } a_k\,b_k \end{cases}$$

C'est une fonction uniforme, finie et continue sur les courbes rectifiables $C$, $\Pi$ et $a_k\,b_k$. Et $\varphi(a_k) = f(a_k)$.

$20^0$. Il existe donc les intégrales $\int_{\gamma_k} \varphi(z)\,dz$ sur les courbes fermées et orientées (mais non nécessairement simples)

$$\gamma_k = C_k + \overline{a_k\,b_k} + A_k^{-1} + \overline{b_{k-1}\,a_{k-1}}\,.$$

Et l'on a

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_k \int_{\gamma_k} \varphi(z)\,dz \tag{4}$$

car les intégrales prises le long des segments $a_k\,b_k$ et $b_k\,a_k$ se détruisent et $\int_\Pi \varphi(z)\,dz = 0$ (cas classique du théorème de Cauchy).

$21^0$. $\quad |f(z) - f(a_k)| < 2\varepsilon \qquad$ sur $\gamma_k$.

En effet, $\gamma_k \subset \bar{R}_k$ (par suite de $7^0$, $16^0$ et de $\overline{a_k\,b_k} \subset \bar{Q}_{km} \subset \bar{R}_k$) ; donc, en vertu de $13^0$,

$$|a_k - z| < \eta \qquad \text{sur } \gamma_k\,. \tag{5}$$

L'inégalité $21^0$ sera donc vérifiée sur $C_k$ et $\bar{A}_k$ (où $\varphi = f$) grâce à $2^0$.

Sur $\overline{a_k b_k}$ on a

$$|\varphi(z) - f(a_k)| = |f(a_k) - f(b_k)| \left| \frac{z - a_k}{a_k - b_k} \right|$$

$$\leq |f(a_k) - f(b_k)| < \varepsilon,$$

car $|a_k - b_k| < \eta$ d'après (5). Enfin on a sur $\overline{a_{k-1}\, b_{k-1}}$

$$|\varphi(z) - f(a_k)| \leq |\varphi(z) - f(a_{k-1})| + |f(a_{k-1}) - f(a_{k-1})| < 2\varepsilon$$

parce qu'on peut appliquer au premier terme l'inégalité précédente (pour $k-1$) et au second terme l'inégalité $2^0$ [vu que $|a_k - a_{k-1}| < \eta$ d'après (5)].

$22^0$. On déduit de $21^0$ :

$$\left| \int_{\gamma_k} \varphi(z)\, dz \right| = \left| \int_{\gamma_k} [\varphi(z) - f(a_k)]\, dz \right| < 2\varepsilon\, \lambda_k$$

où $\lambda_k = s(\gamma_k)$.

$23^0$. Pour évaluer $\lambda_k$ nous avons d'abord ($3^0$, $13^0$)

$$s(C_k) = \frac{s}{n}, \quad |a_k b_k| < 2\frac{s}{n}.$$

Quant à $A_k$, c'est une somme de segments appartenant aux contours des carrés $Q_{kj}$, donc ($5^0$)

$$s(A_k) < 4 \Sigma_j\, l_{kj} = 5 \Sigma_j\, s_{kj} = 5\frac{s}{n}.$$

Ainsi

$$\lambda_k < 10\frac{s}{n}. \tag{6}$$

$24^0$. Nous avons maintenant de (4), $22^0$ et (6)

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| < 20\, s\, \varepsilon$$

ce qui prouve (1), $\varepsilon$ étant arbitraire.

*Séminaire Mathématique*
*de l'Université de Jassy*

*(Reçu le 20 Octobre 1946).*

# SUL PROBLEMA DI DINI - NEUMANN NEL PIANO *)

Nota di

GAETANO FICHERA

Per una questione riguardante la tecnica delle costruzioni aeronautiche, s'è presentata all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo la necessità di dover risolvere il problema della torsione di un prisma rettangolare cavo. Indicata con $R$ una corona rettangolare, sezione retta del prisma cavo, e con $FR$ la sua frontiera e assunto un sistema di assi coordinati cartesiani $xy$ nel piano di tale sezione, è ben noto, in base alla teoria de Saint Venant, che il problema della torsione del prisma considerato conduce a dover ricercare una funzione $u(x,y)$, dotata in $R$ di derivate parziali prime limitate, che sia soluzione del seguente problema di Dini-Neumann:

$$\Delta_2 u = 0 \quad \text{in } R - FR \;, \quad \frac{du}{dn} = y\cos(x,n) - x\cos(y,n) \quad \text{su } FR.$$

Prima di applicare procedimenti di calcolo numerico della soluzione è apparso opportuno accertare l'esistenza di eventuali soluzioni monodrome o polidrome del problema. A tal proposito ho notato che: *il posto problema possiede una soluzione monodroma determinata a meno di una costante arbitraria e infinite polidrome.*

Il procedimento seguito per giungere a questo risultato relativo al particolare problema considerato, s'è rivelato suscettibile di essere esteso al caso generale di un qualsiasi problema di Dini-Neumann in un dominio piano comunque connesso, quando se ne ricerchi la soluzione in una classe di funzioni polidrome.

L'espozione di tale procedimento, applicato ad un generale problema di Dini-Neumann nel piano, forma l'oggetto della presente Nota.

* * *

Sia $D$ un dominio regolare del piano $xy$ la qui completa fron-

*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

tiera $FD$ sia, cioè, costituita da $p+1$ curve regolari chiuse $C_0$, $C_1, \ldots, C_p$, essendo $C_0$ il contorno esterno e $C_1, \ldots, C_p$ i contorni interni.

Indichiamo con $E_D$ la classe delle funzioni polidrome in $D$ che godono delle seguenti proprietà:

1°) ogni ramo della funzione $u$ sia in ogni dominio $T$ semplicemente connesso contenuto in $D$, una funzione continua in $T$ e dotata in $T-FT$ di derivate parziali, prime e seconde continue, verificandosi l'equazione di Laplace $\Delta_2 u = 0$;

2°) le derivate parziali prime della $u$ siano monodrome in $D-FD$, e detto $N$ un insieme di misura lineare nulla, contenuto in $FD$, siano continue in $D-N$;

3°) detta $\{T_\nu\}$ una successione di domini regolari, contenuti in $D-FD$, invadente $D$ (*) e indicata con $n$ la normale a $FT_\nu$ rivolta verso l'interno di $T_\nu$, la derivata normale $\frac{du}{dn}$ sia uniformemente sommabile su $FT_\nu$ (**).

Detta $\Gamma_i$ una curva regolare chiusa contenuta in $D$, che racchiuda $C_i$ ed escluda ogni curva $C_j$ con $j \neq i$, si ponga:

$$Q_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \left( \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy \right).$$

Le costanti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ vengono com'è noto chiamate i *periodi* della funzione $u$. Una funzione monodroma è caratterizzata dal fatto di avere nulli tutti i suoi periodi.

---

(*) — Si dice che la successione $\{T_\nu\}$ è invadente $D$, se ogni $T_\nu$ è contenuto in $T_{\nu+1}$ e per ogni insieme chiuso contenuto in $D - FD$ è possibile determinare un $T_\nu$ che lo contenga.

(**) — Cioè fissato comunque un $\varepsilon > 0$ rimanga determinato un $\sigma_\varepsilon$ tale che per ogni insieme $U$ contenuto in $FT_\nu$ e avente misura lineare minore di $\sigma_\varepsilon$ si abbia qualunque sia $\nu$: $\left| \int_U \frac{du}{dn} ds \right| < \varepsilon$.

E' ben noto che in tale ipotesi $\frac{du}{dn}$ è sommabile su $FD$ e si ha

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{FT_\nu} \frac{du}{dn} ds = \int_{FD} \frac{du}{dn} ds. \tag{1}$$

Fissati arbitrariamente i punti $O_1, O_2, \ldots, O_p$ rispettivamente nell'interno dei domini limitati dalle curve $C_1, C_2, \ldots, C_p$ e detto $P$ un punto di $D$, indichiamo con $\theta_i$ l'angolo, misurato nel senso antiorario, che il raggio vettore $\overrightarrow{O_i P}$ forma col semiasse delle $x$ positive.

Per ogni funzione $u(P)$ della classe $E_D$ si ha in $D$

$$u(P) = u_0(P) + \sum_{i=1}^{p} Q_i \theta_i \tag{2}$$

essendo $u_0(P)$ una funzione armonica regolare in $D$, cioè continua e monodroma in $D$ e verificante in $D - FD$ l'equazione $\Delta_2 u_0 = 0$.

Poichè si ha

$$\int_{FT_v} \frac{d\theta_i}{dn}\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

segue per la (2) che

$$\int_{FT_v} \frac{du}{dn}\, ds = 0.$$

In virtù della (1) possiamo quindi affermare:

I.— *Se la funzione $u(x,y)$ appartiene alla classe $E_D$ si ha*

$$\int_{FD} \frac{du}{dn}\, ds = 0.$$

Siano $l_0, l_1, \ldots, l_p$ le rispettive lunghezze delle curve $C_0, C_1, \ldots, C_p$. Sia assegnata una funzione $f_i(s)$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$ sull'intervallo $(0, l_i)$, la quale riesca continua in tale intervallo privato al più dei punti di un insieme di misura nulla e la quale sia inoltre sommabile in $(0, l_i)$.

Consideriamo il seguente problema di Dini-Neumann: *si ricerca una funzione $u(x,y)$ appartenente alla classe $E_D$ la quale sulla frontiera, fatta al più eccezione per i punti di un insieme di misura lineare nulla, verifichi le condizioni*

$$\frac{du}{dn} = f_i(s) \quad \text{su} \quad C_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, p).$$

Convenendo di supporre che sulla curva $C_0$ il verso dell'arco $s$

crescente sia quello antiorario, e sulle curve $C_1, C_2, \ldots, C_p$ quello orario, per il teorema I abbiamo:

II. — *Condizione necessaria perchè il problema posto abbia soluzione è che si abbia*

$$\sum_{i=0}^{p} \int_{0}^{C_i} f_i(s)\, ds = 0. \tag{3}$$

Sussiste inoltre il seguente teorema:

III. — *Assegnate arbitrariamente le costanti* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, C$, *non può esistere più di una soluzione del problema considerato i cui periodi siano rispettivamente uguali ad* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ *e che un prefissato punto* $P_0$ *di* $D$ *assuma il valore* $C$.

Siano infatti $u_1$, ed $u_2$ due siffatte soluzioni. Posto $u = u_1 - u_2$, in virtù della (2) si riconosce che la $u$ è monodroma in $D$.

Si ha allora per un notissimo corollario del lemma di Green

$$\iint_{T_\nu} \left\{ \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 \right\} dx\, dy + \int_{FT_\nu} u \frac{du}{dn}\, ds = 0.$$

Data la continuità della $u$ in $D$ la funzione $u \dfrac{du}{dn}$ è uniformemente sommabile su $FT_\nu$ e pertanto, essendo $\dfrac{du}{dn} = 0$ quasi ovunque su $FD$, si ha

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{FT_\nu} u \frac{du}{dn}\, ds = 0.$$

Ne segue

$$\iint_{FD} \left\{ \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 \right\} dx\, dy = 0.$$

Deve quindi essere la $u$ costante in $D$.

Ma $u_1$ e $u_2$ assumono valori eguali in $P_0$ e pertanto si ha in $D$: $u_1 \equiv u_2$.

Segue come corollario che

IV. — *Se* $u_0(x,y)$ *è una soluzione monodroma del problema, ogni altra soluzione monodroma si ottiene ponendo*

$$u = u_0 + C,$$

*essendo* $C$ *una costante arbitraria.*

Estendendo alle funzioni della classe $E_D$ un procedimento ideato dal prof Picone (*), atto a tradurre i problemi di Dini-Neumann, relativi a domini comunque connessi, in problemi di Dirichlet, perverremo a dimostrare, una volta assicurata l'esistenza della soluzione per il problema di Dirichlet in una certa classe $E'_D$ di funzioni armoniche, che verrà in seguito precisata, il seguente teorema:

V. — *Il problema di Dini-Neumann considerato possiede infinite soluzioni ed una di queste è determinata appena se ne assegnino i periodi e il valore in un punto $P_0$ di $D$.*

Poniamo:

$$\frac{d \log \overline{O_i P}}{dn} \ (\text{su } C_j) = \omega_{ij}(s) \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2, \ldots, p) \\ (j = 0, 1, \ldots, p); \end{matrix}$$

$$b_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_i} f_i(s)\, ds\,; \quad g_j(s) = -\int_0^s f_j(t)\, dt + \sum_{i=1}^{p} b_i \int_0^s \omega_{ij}(t)\, dt.$$

Abbiamo:

$$(4) \qquad \int_0^{l_0} \omega_{i0}(s)\, ds = -2\pi\,, \qquad \int_0^{l_j} \omega_{ij}(s)\, ds \begin{cases} = 0\,, & \text{se } i \neq \\ = 2\pi, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Per la (3) e per le (4) segue

$$g_j(0) = g_j(l_j).$$

Nella classe $E'_D$ delle funzioni armoniche e regolari in $D$ e dodate in $D - FD$ di derivate parziali prime, continue in $D - N$ (essendo $N$ un insieme di $FD$ di misura lineare nulla) e uniformemente sommabili su $FT_v$ ammettiamo esistenti le funzioni $v_0, v_1, \ldots, v_p$ soluzioni dei seguenti problemi di Dirichlet

$$\Delta_2 v_0 = 0 \quad \text{in} \quad D - FD\,, \quad v_0 = g_i(s) \quad \text{su} \quad C_j\,;$$

$$\Delta_2 v_i = 0 \quad \text{in} \quad D - FD\,, \quad v_i = 1 \quad \text{su} \quad C_i\,, \quad v_i = 0 \quad \text{su} \quad C_j \quad (j \neq i)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p).$$

Le funzioni $v_0, v_1, \ldots, p$ sono univocamente determinate come è assai facile dimostrare.

(*) — Cfr. M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore* [Rondinella, Napoli (1941)] pagg. 363-366.

Basta ripetere un ragionamento analogo a quello fatto nella dimostrazione del teorema III.

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, $C$ constanti arbitrarie, la funzione del punto $P$

$$u(P; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, C) = C + \sum_{i=1}^{p} b_i \log \overline{O_i P} +$$

(5)

$$+ \int_{P_0}^{P} \left[ \left( \frac{\delta v_0}{\delta y} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\delta v_i}{\delta y} \right) dx - \left( \frac{\delta v_0}{\delta x} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\delta v_i}{\delta x} \right) dy \right]$$

per qualsiasi scelta dei valori delle suddette costanti appartiene alla classe $E_D$ ed è soluzione del problema di Dini-Neumann considerato.

E' ovvio verificare che la $u$ soddisfa alle condizioni $1^0$) e $2^0$) che definiscono $E_D$. D'altronde su ogni curva $C$ interna a $D$ si ha:

$$\frac{du}{dn} = \sum_{i=1}^{p} b_i \frac{d \log \overline{O_i P}}{dn} + \left( \frac{\delta v_0}{\delta y} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\delta v_i}{\delta y} \right) (\cos x, u) -$$

$$- \left( \frac{\delta v_0}{\delta x} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\delta v_i}{\delta x} \right) \cos (y, n) = \sum_{i=1}^{p} b_i \frac{d \log \overline{O_i P}}{dn} -$$

$$- \left( \frac{\delta v_0}{\delta x} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\delta v_i}{\delta x} \right) \frac{dx}{ds} - \left( \frac{\delta v_0}{\delta y} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\delta v_i}{\delta y} \right) \frac{dy}{ds} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} b_i \frac{d \log \overline{O_i P}}{dn} - \frac{dv_0}{ds} - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{dv_i}{ds}$$

e pertanto $\frac{du}{dn}$ è uniformemente sommabile su $FT_\nu$.

Eccettuati al più i punti di un insieme $N'_j$ di misura nulla, riesce su $C_j$

$$\frac{dv_0}{ds} = \frac{dg_j(s)}{ds} = - f_j(s) + \sum_{i=1}^{p} b_i \varpi_{ij}(s)$$

e poichè si ha, su $C_j$, $\frac{dv_i}{ds} = 0$, $\frac{d \log \overline{O_i P}}{dn} = \varpi_{ij}(s)$, detto $N''_j$ l'insieme dei punti di $C_j$, nei quali una almeno delle funzioni $\frac{\delta v_i}{\delta x}$,

$\frac{\delta v_i}{\delta y}$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$ non è continua, su $C_j - N'_j - N''_j$ si ha:

$$\frac{du}{dn} = f_j\ (s).$$

Cioè la $u$ è una soluzione del problema.

Si può, ovviamente, determinare $C$ in modo che la $u$ acquisti in un punto $P_o$ di $D$ un valore comunque prefissato. Dimostriamo inoltre che date arbitrariamente le costanti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ è possibile determinare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ in maniera tale che la funzione $u(P; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, C)$ abbia per periodi i numeri $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$. Con ciò, in virtù del teorema III, avremo anche dimostrato che la (5) fornisce tutte le possibili soluzioni del problema.

Posto:

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_i} \frac{dv_j}{dn}\, ds \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p)$$

si debbono poter determinare le costanti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ in modo da soddisfare al seguente sistema lineare di $p$ equazioni in $p$ incognite

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{p} A_{ij}\, \alpha_j + \int_{\Gamma_i} \frac{dv_o}{dn}\, ds = 2\pi Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Ciò è possibile poichè, come verremo a dimostrare, il determinante del sistema $|A_{ij}|$ è diverso da zero.

Sia infatti $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_p^{(0)}$ una soluzione del sistema omogeneo associato al sistema (6). Si ponga

$$v(P) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^{(0)}\, v_j(P).$$

Considerata la funzione, appartenente ad $E_D$

$$u_0(P) = \int_{P_0}^{P} \left(\frac{\delta v}{\delta y}\, dx - \frac{\delta v}{\delta x}\, dy\right),$$

si costata che essa è monodroma in $D$, essendo

$$\int_{\Gamma_i} du_0 = \sum_{j=1}^{p} A_{ij}\, \alpha_j^{(0)} = 0,$$

e che su $FD$ si ha: $\frac{du_0}{dn} = -\frac{dv}{ds} = 0.$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

In virtù del teorema IV ne segue che la $u_0\ (P)$, e quindi anche la $v\ (P)$, è costante in $D$.

Avendosi $\alpha_j^{(0)} = v\ (\text{su}\ C_j) = v\ (\text{su}\ C_0) = 0$, si conclude che il sistema omogeneo considerato ha sempre nulle le sue soluzioni, cioè che il determinante $|A_{ij}|$ è diverso da zero.

*L'Institut National Italien pour les Applications du Calcul. Rome.*

*(Reçu le 22 Juillet 1946).*

## SUR LE PROBLÈME PLAN DE DINI-NEUMANN

**(Résumé)**

L'auteur, après avoir établi, par les méthodes du calcul numérique, un théorème concernant l'unicité à un nombre constant près de la solutions monodrome et l'infinité des solution polydromes pour un certain problème de D i n i - N e u m a n n intéressant la technique aéronautique, a appliquées les mêmes méthodes à la recherche, dans une classe de fonctions polydromes, de la solution d'un problème quelconque de D i n i - N e u m a n n dans un domaine plan ayant un ordre de connexité arbitraire.

513

# SUR L'ENVELOPPE DES FAMILLES PLANES DE CONIQUES

par

C. P. BOGDAN

Les familles planes de coniques ont été beaucoup étudiées, mais on n'a pas donné une classification systématique de ces familles.

Dans cette note je vais donner une classification des familles planes de coniques, en considérant les points communs d'une conique avec la conique infiniment voisine.

Comme deux coniques ont quatre points communs, nous aurons la classification suivante :

1. Deux coniques infiniment voisines ont quatre points confondus communs.

Dans ce cas l'enveloppe de la famille est formée d'une seule courbe, à laquelle toutes les coniques de la famille sont osculatrices.

Ce cas n'est pas intéressant, car une courbe quelconque peut toujours être considérée comme enveloppée de ces coniques osculatrices.

2. Deux coniques infiniment voisines ont deux points communs, dont l'un est triple.

Dans ce cas l'enveloppe est formée de deux courbes.

Les coniques de la famille ont quatre points communs avec une courbe et son tangentes à la deuxième.

La première courbe peut être donnée d'avance et la deuxième est déterminée dès qu'on nous donne un point de cette courbe, point fixé sur la première.

Si la première est dégénérée en un point, nous avons le cas banal des coniques osculatrices en un point fixe et tangentes à une autre courbe.

De même est banal le cas où la deuxième courbe est dégénérée en un point. Nous avons les coniques passant par un point et ayant quatre points communs avec une courbe donnée.

Si les deux courbes sont dégénérées, nous avons un faisceau de coniques ayant trois points communs confondues et passant par un quatrième point.

3. Deux coniques infiniment voisines sont bitangentes.

L'enveloppe est formée de deux courbes et entre les points des deux courbes il y a une correspondance telle, que dans les points correspondants il y a une conique qui a trois points communs avec chacune des deux courbes. Donc les deux courbes ne peuvent pas être quelconques.

Une des deux courbes peut être dégénerée en un point et nous avons le cas banal des coniques passant par un point où sont tangentes à une droite et qui ont trois points communs avec une courbe donnée.

Les deux courbes peuvent dégénérer et nous avons un faisceau de coniques bitangentes.

4. Deux coniques infiniments voisines sont tangentes en un point et ont deux autres points communs distincts.

L'enveloppe est formée de trois courbes et les coniques de la famille sont tangentes à deux des courbes de l'enveloppe et ont trois points communs avec la troisième.

Une des deux premières courbes peut être dégénérée en un point et nous avons le cas des familles de coniques passant par un point, qui sont tangentes à une courbe et qui ont trois points communs avec une deuxième courbe.

Si la troisième courbe est dégénérée en un point, nous avons le cas des coniques passants par un point où sont tangentes à une droite et sont tangentes à deux autres courbes.

Seulement en applicant les théorèmes de Pascal-Brianchon on voit que les courbes qui composent l'enveloppe ne peuvent pas être quelconques.

Si deux des courbes qui composent l'enveloppe sont dégénérées en points, nous avons le cas banal des coniques passant par deux points (dans un des points peuvent être tangentes à une droite donnée) et qui ont trois (deux) points communs avec une courbe donnée.

5. Deux coniques infiniment voisines ont quatre points distincts communs. C'est le cas général.

L'enveloppe est formée par quatre courbes et entre les points de ces courbes il y a une correspondance telle qu'il y a une conique qui soit tangente à toutes les quatre courbes dans les points correspondants.

On voit que les quatre courbes ne peuvent pas être quelconques.

Aussi ne peut pas être arbitraire la correspondance entre les quatre courbes.

Ces courbes peuvent dégénérer. Si trois courbes sont dégénérées en points, nous avons le cas banal des coniques passant par trois points et tangentes à une courbe donnée.

Si seulement deux des courbes sont dégénérées, nous avons le cas des coniques passant par deux points et tangentes à deux courbes.

Les deux courbes ne sont pas quelconques. On peut prendre d'avance le point et une courbe, l'autre courbe est déterminée dès qu'on donne un de ces points, qui doit correspondre à un point fixé de la première.

Dans tous les cas en appliquant le théorème qu'une conique est déterminée par cinq de ces points, on voit que les courbes qui composent l'enveloppe ne peuvent pas être arbitraires.

*Séminaire Mathématique*
*de l'Université de Jassy*

*(Reçu le 20 Septembre 1946).*

# SUR LES FAMILLES DE CONIQUES DE L'ESPACE ORDINAIRE

par

C. P. BOGDAN

1. Dans la note précédente je me suis occuppé des familles planes de coniques, en donnant une classification de ces familles.

Maintenant je vais donner une classification des familles de coniques appartenant à un $S_3$, familles dépendant d'un paramètre. Les surfaces lieu de coniques ont été beaucoup étudiées et on a cherché des coordonnées pour une telle courbe.

G. Thomsen [1]) a étudié ces familles dans un très bel article ; mais il a fait une étude analytique et a considéré une conique comme une quadrique dégénérée tangentiellement, c'est à dire comme enveloppe de plans, au lieu de la considérer comme un lieu de points.

Les coordonnées qu'il donne pour une conique ont l'avantage d'être symétriques.

Dans son étude il fait une classification des familles de coniques de l'espace à trois dimensions, classification faite suivant la nature du faisceau de quadriques détérminé par une conique et la conique infiniment voisine.

Dans cette note, en considérant une conique comme un lieu de points, je fait une classification complète de ces familles de coniques, suivant la nature de la surface dévéloppable des plans des coniques et les points communs d'une conique avec la conique infiniment voisine.

2. Soit $\Sigma$ une famille de coniques appartenant à un $S_3$ et dépendant d'un paramètre. Nous allons distinguer trois cas suivant que :

I. les plans des coniques de la famille forment une surface développable non dégénérée ;

II. les plans des coniques forment un cône (passent par un point) ;

---

1) G. Thomsen, *Über Kegelschnitt im Raum.* Math. Annalen, Bd. 108.

III. les plans des coniques forment un faisceau (passent par une droite).

Dans le premier cas la droite caractéristique du plan d'une conique de la famille peut être ou ne pas être tangente à la conique de ce plan.

Si la droite caractéristique du plan n'est pas tangente à la conique correspondante nous avons les catégories suivantes:

$1_1$. Deux coniques infiniments voisines n'ont aucun point commun. C'est le cas général.

$1_2$. Deux coniques infiniments voisines ont un point commun. Les surfaces de Steiner font partie de cette catégorie.

$1_3$. Deux coniques infiniment voisines ont deux points communs. C'est le cas des surfaces étudiées par M. Blutel [1]) et particulièrement des quadriques.

Si la droite caractéristique est tangente à la conique de son plan, nous avons les catégories suivantes:

$1_4$. Le point de contact n'est pas le point caractéristique du plan. Dans ce cas deux coniques infiniments voisines n'ont aucun point commun.

$1_5$. Le point de contact est le point caractéristique du plan, mais la conique de ce plan est seulement tangente à la courbe caractéristique.

Deux coniques infiniments voisines ont un point commun.

Les coniques de la famille appartiennent aux plans osculateurs d'une courbe d'un $S_3$, sont tangentes à cette courbes, mais n'ont pas trois points communs avec elle.

$1_6$. Le point de contact est le point caractéristique du plan et la conique de ce plan a trois points communs avec la courbe caractéristique. Deux coniques infiniment voisines sont tangentes dans ce cas. Les coniques de la famille appartiennent aux plans osculateurs d'une courbe et ont trois points communs avec elle.

M. Blutel a étudié ces familles dans son article cité plus haut.

3. Si les plans des coniques de la famille passent par un point, qui est le sommet du cône enveloppé par les plans des coniques, nous allons distinguer le cas où la génératrice du cône est tangente ou n'est pas tangente à la conique correspondante.

Si elle n'est pas tangente nous avons les cas suivants:

---

1) E. Blutel, *Recherches sur les surfaces etc.* Ann. de l'Ec. Norm. Sup. 1890.

$2_1$. Deux coniques infiniment voisines n'ont aucun point commun.

$2_2$. Deux coniques infiniment voisines ont un point commun.

Ce point peut être le sommet du cône, dans quel cas toutes les coniques de la famille passent par ce point.

$2_3$. Deux coniques infiniment voisines ont deux points communs. Un de ces points peut être le sommet du cône.

Si la génératrice du cône est tangente à la conique correspondante nous avons les cas suivants :

$2_4$. Le point de contact n'est pas le sommet du cône. Dans ce cas deux coniques infiniment voisines n'ont aucun point commun.

$2_5$. Le point de contact est le sommet du cône. Dans ce cas toutes les coniques de la famille ont ce point commun.

4. Si les plans des coniques de la famille forment un faisceau, nous allons distinguer les cas ou l'axe du faisceau n'est pas tangent aux coniques de la famille ou est tangent.

Si l'axe n'est pas tangent nous avons les catégories suivantes :

$3_1$. Deux coniques infiniment voisines n'ont aucun point commun.

$3_2$. Deux coniques infiniment voisines ont un point commun. Ce point est fixe et, bien entendu, situé sur l'axe du faisceau.

$3_3$. Deux coniques infiniment voisines ont deux points communs. Ces points sont fixes et déterminent l'axe du faisceau.

Si l'axe du faisceau est tangent aux coniques de la famille, nous avons les cas suivants :

$3_4$. Deux coniques infiniments voisines ont un point commun.

$3_5$. Deux coniques infiniments voisines sont tangentes. Le point de contact est un point fixe de l'axe du faisceau des plans des coniques de la famille.

*Séminaire Mathématique*
*de l'Université de Jassy*

*(Reçu le 20 Novembre 1946).*

# SUR LES SOLUTIONS PAR COMPOSITION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

par

D. I. MANGERON

1. Dans un de ses travaux plus récents, caractérisé bien justement par la critique internationale comme contenant à la fois les résultats des plus simples et des plus intéressants [1]), concernant le domaine des équations différentielles de la physique mathématique, M. G. Doetsch a établi une liaison entre les problèmes des valeurs à la frontière pour les systèmes formés par les «équations indéfinies» à coefficients constants et à deux variables indépendantes du type elliptique, hyperbolique et parabolique et pour les «conditions définies» à vérifier le long de certaines lignes particulières. M. Doetsch s'est exprimé le vœu que son travail [2]) soit l'origine des autres recherches.

Tout récemment, M. L. Koschmieder a élargi les résultats établis par M. Doetsch en étudiant certaines liaisons entre les solutions des problèmes «bien posés» [3]) pour les équations paraboliques (les distributions simples ou mêmes multiples des températures) et celles des équations des potentiels dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions [4]).

Dans ce que suit nous nous proposons d'en déduire un certain nombre de résultats formels généralisant dans un certain sens ceux obtenus dans les mémoires cités, tout en espérant de pouvoir revenir dans une recherche plus étendue sur quelques problèmes destinés à approfondir le même sujet si riche en matière encore inépuisée.

2. Considérons les équations aux dérivées partielles à coefficients constants et à deux variables indépendantes de types suivants :

$$(E) \qquad \frac{\delta^n u(x,y)}{\delta x^n} + \frac{\delta^n u(x,y)}{\delta y^n} = 0,$$

$$(H) \qquad \frac{\delta^n u(x,y)}{\delta x^n} - \frac{\delta^n u(x,y)}{\delta y^n} = 0,$$

$$(P) \qquad \frac{\delta^n u(x,y)}{\delta x^n} - \frac{\delta^{n-1} u(x,y)}{\delta y^{n-1}} = 0,$$

qui se réduisent respectivement, pour $n = 2$, aux équations classiques et précisément, à l'équation des potentiels, à l'équation des ondes et à l'équation de propagation de la chaleur.

Nous allons démontrer que par des simples combinaisons intégrales de la sorte que nous avons rencontrées dans la théorie des «compositions du second espèce» de V. Volterra, de deux solutions égales ou bien différentes d'une de ces équations ou même de deux équations diverses on en peut déduire une nouvelle solution d'une de ces trois équations.

a) Soit $u_e(x,t)$ la fonction qui satisfait à l'équation $(E)$ dans le rectangle $a < x < c$, $b < y < d$, et $v_e(y,t)$ la fonction qui satisfait à l'équation $(E)$ analogue dans le rectangle $\alpha < y < \gamma$, $b < t < d$. Nous supposerons que les problèmes de détermination des solutions $u_e$, $v_e$ dans ces rectangles soient bien posés.

Pour la fonction de composition à droite [5]

$$(1) \qquad U_{ee}(x,y) = \int_b^d u_e(x,t)\, v_e(y,t)\, dt$$

on a

$$\frac{\delta^n U_{ee}(x,y)}{\delta x^n} = \int_b^d \frac{\delta^n u_e(x,t)}{\delta x^n} v_e(y,t)\, dt = -\int_b^d \frac{\delta^n u_e(x,t)}{\delta t^n} v_e(y,t)\, dt =$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\delta^{n-i} u_e(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-1} v_e(y,t)}{\delta t^{i-1}} \right]_{t \to b}^{t \to d} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \int_b^d u_e(x,t) \frac{\delta^n v_e(y,t)}{\delta t^n}\, dt$$

et puisque

$$\frac{\delta^n U_{ee}(x,y)}{\delta y^n} = \int_b^d u_e(x,t) \frac{\delta^n v_e(y,t)}{\delta y^n}\, dt = -\int_b^d u_e(x,t) \frac{\delta^n v_e(y,t)}{\delta t^n}\, dt,$$

on obtient

$$(2) \qquad \frac{\delta^n U_{ee}(x,y)}{\delta x^n} - (-1)^n \frac{\delta^n U_{ee}(x,y)}{\delta y^n} =$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\delta^{n-i} u_e(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-1} v_e(y,t)}{\delta t^{i-1}} \right]_{t \to b}^{t \to d}.$$

Si on suppose en outre *)

$$\lim_{t \to d} \left[ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\delta^{n-i} u_e(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-1} v_e(y,t)}{\delta t^{i-1}} \right] - \lim_{t \to b} \left[ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\delta^{n-i} u_e(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-1} v_e(y,t)}{\delta t^{i-1}} \right] = 0, \tag{3}$$

on en déduit

$$\frac{\delta^n U_{ee}(x,y)}{\delta x^n} - \frac{\delta^n U_{ee}(x,y)}{\delta y^n} = 0, \tag{4}$$

ou bien

$$\frac{\delta^n U_{ee}(x,y)}{\delta x^n} + \frac{\delta^n U_{ee}(x,y)}{\delta y^n} = 0, \tag{5}$$

suivant que $n$ est un nombre pair ou impair. Donc :

*Une composition à droite de deux solutions différentes ou bien éventuellement coïncidentes de l'équation (E) donne une solution de l'équation (H) ou (E) suivant que n est pair ou impair.*

b) Soit $u_h(x,t)$ la fonction qui satisfait à l'équation $(H)$ dans le rectangle $a < x < c$, $b < t < d$, et $v_h(y\,t)$ la fonction qui satisfait à l'équation analogue à $(H)$ dans le rectangle $\alpha < y < \gamma$, $b < t < d$. Pour la fonction de composition à droite

$$U_{hh}(x,y) = \int_b^d u_h(x,t)\, v_h(y,t)\, dt \tag{6}$$

on a

$$\frac{\delta^n U_{hh}(x,y)}{\delta x^n} = \int_b^d \frac{\delta^n u_h(x,t)}{\delta x^n} v_h(y,t)\, dt = \int_b^d \frac{\delta^n u_h(x,t)}{\delta t^n} v_h(y,t)\, dt =$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\delta^{n-i} u_h(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-1} v_h(y,t)}{\delta t^{i-1}} \right]_{t \to b}^{t \to d} +$$

$$+ (-1)^n \int_b^d u_h(x,t) \frac{\delta^n v_h(y,t)}{\delta t^n} dt$$

et puisque

*) Dans ce que suit nous ferons toujours tacitement ces suppositions relatives : à la convergence des intégrales, à la différentiation et à l'intégration sous le signe $\int$, tant qu'à l'existence des valeurs limites des sommes de la forme (3).

$$\frac{\delta^n U_{hh}(x,y)}{\delta y^n} = \int_b^d \frac{\delta^n v_h(y,t)}{\delta y^n} u_h(x,t)\, dt = \int_b^d u_h(x,t) \frac{\delta^n v_h(y,t)}{\delta y^n}\, dt,$$

on obtient

$$(7) \qquad \frac{\delta^n U_{hh}(x,y)}{\delta x^n} - (-1)^n \frac{\delta^n U_{hh}(x,y)}{\delta y^n} = \left[ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\delta^{n-i} u_h(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-1} v_h(y,t)}{\delta t^{i-1}} \right]_{t \to b}^{t \to d}.$$

Si on suppose en outre

$$(8) \qquad \lim_{t \to d} \left[ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\delta^{n-i} u_h(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-1} v_h(y,t)}{\delta t^{i-1}} \right] - \lim_{t \to b} \left[ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\delta^{n-i} u_h(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-1} v_h(y,t)}{\delta t^{i-1}} \right] = 0,$$

on en déduit

$$(9) \qquad \frac{\delta^n U_{hh}(x,y)}{\delta x^n} - \frac{\delta^n U_{hh}(x,y)}{\delta y^n} = 0,$$

ou bien

$$(10) \qquad \frac{\delta^n U_{hh}(x,y)}{\delta x^n} + \frac{\delta^n U_{hh}(x,y)}{\delta y^n} = 0,$$

suivant que $n$ est un nombre pair ou impair. Donc :

*Une composition à droite de deux solutions différentes ou bien éventuellement égales entre elles de l'équation (H) donne une solution de l'équation (H) ou (E) suivant que n est pair ou impair.*

c) Soit $u_p(x,t)$ la fonction qui satisfait à l'équation $(P)$ dans la bande $a < x < c$, $0 < t$ et $v_p(y,t)$ la fonction qui satisfait à l'équation analogue à $(P)$ dans la bande $b < y < d$, $0 < t$. Pour la fonction de composition à droite

$$(11) \qquad U_{pp}(x,y) = \int_0^\infty u_p(x,t)\, v_p(y,t)\, dt$$

on a

$$\frac{\delta^n U_{pp}(x,y)}{\delta x^n} = \int_0^\infty \frac{\delta^n u_p(x,t)}{\delta x^n} v_p(y,t)\, dt = \int_0^\infty \frac{\delta^{n-1} u_p(x,t)}{\delta t^{n-1}} v_p(y,t)\, dt =$$

$$= \left[ \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-2} \frac{\delta^{n-i} u_p(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-2} v_p(y,t)}{\delta t^{i-2}} \right]_{t \to 0}^{t \to \infty} +$$

$$+ (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} u_p(x,t) \frac{\delta^{n-1} v_p(y,t)}{\delta t^{n-1}} \, dt$$

et puisque

$$\frac{\delta^n U_{pp}(x,y)}{\delta y^n} = \int_0^{\infty} u_p(x,t) \frac{\delta^n v_p(y,t)}{\delta y^n} \, dt = \int_0^{\infty} u_p(x,t) \frac{\delta^{n-1} v_p(y,t)}{\delta t^{n-1}} \, dt,$$

on obtient

$$\frac{\delta^n U_{pp}(x,y)}{\delta x^n} - (-1)^{n-1} \frac{\delta^n U_{pp}(x,y)}{\delta y^n} =$$

$$= \left[ \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-2} \frac{\delta^{n-i} u_p(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-2} v_p(y,t)}{\delta t^{i-2}} \right]_{t \to 0}^{t \to \infty}. \tag{12}$$

Si on suppose en outre

$$\lim_{t \to \infty} \left[ \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-2} \frac{\delta^{n-i} u_p(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-2} v_p(y,t)}{\delta t^{i-2}} \right] -$$

$$- \lim_{t \to 0} \left[ \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-2} \frac{\delta^{n-i} u_p(x,t)}{\delta t^{n-i}} \frac{\delta^{i-2} v_p(y,t)}{\delta t^{i-2}} \right] = 0, \tag{13}$$

on en déduit

$$\frac{\delta^n U_{pp}(x,y)}{\delta x^n} + \frac{\delta^n U_{pp}(x,y)}{\delta y^n} = 0, \tag{14}$$

ou bien

$$\frac{\delta^n U_{pp}(x,y)}{\delta x^n} - \frac{\delta^n U_{pp}(x,y)}{\delta y^n} = 0, \tag{15}$$

suivant que $n$ est un nombre pair ou impair. Donc :

*Une composition à droite de deux solutions différentes ou bien éventuellement coincidentes de l'équation (P) donne une solution de l'équation (E) ou (H) suivant que n est pair ou impair.*

d) Soit $u_h(x,t)$ la fonction qui satisfait à l'équation $(H)$ dans la bande $a < x < c$, $0 < t$, et $v_p(x,y)$ la fonction qui satisfait à l'équation

$(P)$ dans la bande $a<x<c$, $0<y$. Pour la fonction de composition à gauche

$$U_{hp}(y,t)=\int_a^c u_h(x,t)\,v_p(x,y)\,dx \tag{16}$$

on a

$$\frac{\delta^n U_{hp}(y,t)}{\delta t^n}=\int_a^c \frac{\delta^n u_h(x,t)}{\delta t^n}\,v_p(x,y)\,d\lambda=\int_a^c \frac{\delta^n u_h(x,t)}{\delta x^n}\,v_p(x,y)\,dx=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\delta^{n-i}u_h(x,t)}{\delta x^{n-i}}\,\frac{\delta^{i-1}v_p(x,y)}{\delta x^{i-1}}\right]_{x\to a}^{x\to c}+$$

$$+(-1)^n\int_a^c u_h(x,t)\,\frac{\delta^n v_p(x,y)}{\delta x^n}\,dx$$

et puisque

$$\frac{\delta^{n-1}U_{hp}(y,t)}{\delta y^{n-1}}=\int_a^c u_h(x,t)\,\frac{\delta^{n-1}v_p(x,y)}{\delta y^{n-1}}\,dx=\int_a^c u_h(x,t)\,\frac{\delta^n v_p(x,y)}{\delta x^n}\,dx,$$

on obtient

$$\frac{\delta^n U_{hp}(y,t)}{\delta t^n}-(-1)^n\frac{\delta^{n-1}}{\delta y^{n-1}}\frac{U_{hp}(y,t)}{}=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\delta^{n-i}u_h(x,t)}{\delta x^{n-i}}\,\frac{\delta^{i-1}v_p(x,y)}{\delta x^{i-1}}\right]_{x\to a}^{x\to c}.$$

Si on suppose en outre

$$\lim_{x\to c}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\delta^{n-i}u_h(x,t)}{\delta x^{n-i}}\,\frac{\delta^{i-1}v_p(x,y)}{\delta x^{i-1}}\right]-$$

$$-\lim_{x\to a}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\delta^{n-i}u_h(x,t)}{\delta x^{n-i}}\,\frac{\delta^{i-1}v_p(x,y)}{\delta x^{i-1}}\right]=0, \tag{17}$$

on déduit

$$\frac{\delta^n U_{hp}(y,t)}{\delta t^n}-\frac{\delta^{n-1}U_{hp}(y,t)}{\delta y^{n-1}}=0, \tag{18}$$

ou bien

$$\frac{\delta^n U_{hp}(y,t)}{\delta t^n}+\frac{\delta^{n-1}U_{hp}(y,t)}{\delta y^{n-1}}=0, \tag{19}$$

suivant que $n$ est pair ou impair. Donc, en introduisant les équations de la forme (19) que nous désignerons dorénavant avec $(P')$ (équations conjuguées à $(P)$), on a le résultat suivant :

*Une composition à gauche de deux solutions respectivement des équations (H) et (P) donne une solution de l'équation (P) ou (P') suivant que n est pair ou impair.*

e) D'une manière analogue, par un changement convenable de signe dans les développements de la sousdivision précédente d), on trouve :

*Une composition à gauche de deux solutions respectivement des équations (E) et (P) donne une solution de l'équation (P') ou (P) suivant que n est pair ou impair.*

On obtient aussi bien facilement c'est autre résultat :

*Une composition à droite de deux solutions respectivement des équations (E) et (H) donne une solution de l'équation (E) ou (H) suivant que n est pair ou impair.*

Les intégrales donnant les fonctions $U_{ep}$, $U_{hp}$, $U_{eh}$, étant commutatives, nous recevons pour les trois types d'équations considérées les schémas de composition suivants :

(20)

| | $(E)$ | $(H)$ | $(P)$ |
|---|---|---|---|
| $(E)$ | $(H)$ | $(E)$ | $(P')$ |
| $(H)$ | $(E)$ | $(H)$ | $(P)$ |
| $(P)$ | $(P')$ | $(P)$ | $(E)$ |

ou bien

(21)

| | $(E)$ | $(H)$ | $(P)$ |
|---|---|---|---|
| $(F)$ | $(E)$ | $(H)$ | $(P)$ |
| $(H)$ | $(H)$ | $(E)$ | $(P')$ |
| $(P)$ | $(P)$ | $(P')$ | $(H)$ |

selon que $n$ est pair ou impair.

On interprète les schémas précédents de la manière suivante :

De deux solutions, par exemple (dernière ligne, dernière colonne), de l'équation $(P)$ (dans ce cas-ci : composition à droite ; formule (11)), on obtient une solution de l'équation $(E)$ ou $(H)$ suivant que $n$ est pair ou impair.

3. Au lieu de prendre les équations telles que $(E)$, $(H)$, $(P)$ out l'équation «conjuguée» de $(P)$, $(P')$, on peut prendre, en conservan, toujours les équations de deux premières types, c'est à dire $(E)$ et $(H)$ à la place de $(P)$ ou $(P')$ ces autres :

$$(P^*) \qquad \frac{\delta^n u(x,y)}{\delta x^n} - \frac{\delta^q u(x\,y)}{\delta y^q} = 0$$

ou

$$(P'^*) \qquad \frac{\delta^n u(x,y)}{\delta x^n} + \frac{\delta^q u(y,x)}{\delta y^q} = 0,$$

$q$ étant un entier différent de $n$.

Par des transformations analogues aux précédents, on obtient dans ce cas les schémas de composition suivants :

(22)

| | $(E)$ | $(H)$ | $(P^*)$ |
|---|---|---|---|
| $(E)$ | $(H)$ | $(E)$ | $(P'^*)$ |
| $(H)$ | $(E)$ | $(H)$ | $(P^*)$ |
| $(P^*)$ | $(P'^*)$ | $(P^*)$ | $(H)$ |

pour $n$ et $q$ pairs ;

(23)

| | $(E)$ | $(H)$ | $(P^*)$ |
|---|---|---|---|
| $(E)$ | $(H)$ | $(E)$ | $(P'^*)$ |
| $(H)$ | $(E)$ | $(H)$ | $(P^*)$ |
| $(P^*)$ | $(P'^*)$ | $(P^*)$ | $(E)$ |

pour $n$ pair et $q$ impair ;

(24)

| | $(E)$ | $(H)$ | $(P^*)$ |
|---|---|---|---|
| $(E)$ | $(E)$ | $(H)$ | $(P^*)$ |
| $(H)$ | $(H)$ | $(E)$ | $(P'^*)$ |
| $(P^*)$ | $(P^*)$ | $(P'^*)$ | $(H)$ |

pour $n$ impair et $q$ pair ;

(25)

| | $(E)$ | $(H)$ | $(P^*)$ |
|---|---|---|---|
| $(E)$ | $(E)$ | $(H)$ | $(P^*)$ |
| $(H)$ | $(H)$ | $(E)$ | $(P'^*)$ |
| $(P^*)$ | $(P^*)$ | $(P'^*)$ | $(E)$ |

pour $n$ et $q$ impairs.

4. Après avoir établi selon le point de vue précisé plus haut les propriétés formelles des solutions par composition des équations $(E)$, $(H)$, $(P)$ ou plus généralement $(P^*)$, on peut se demander de déterminer des «triplets» ou mêmes des «m-uplets» d'équations indéfinies pour les solutions desquelles on pourrait établir les schémas de composition analogues aux (20), (21) ou bien aux (22) – (25).

Il serait intéressant, après avoir établi différents systèmes d'équations définies pour que les problèmes à la frontière pour les «triplets» d'équations indéfinies telles que $(E)$, $(H)$, $(P)$ soient bien posés, d'étudier quelles sont les liaisons entre les valeurs à la frontière des fonc-

tions composantes. C'est en étudiant cette dernière question pour les équations de propagation de la chaleur dans les milieux à une dimension, que M. G. Doetsch a reussi d'examiner un cas important de certaines solutions singulières et d'eclaircir, entre autres, d'un nouveau point de vue, la raison d'être de quelques formules de la théorie des transformations de Laplace[6]).

*Séminaire Mathématique*
*de l'Ecole Polytechnique*
*de Jassy*

*(Reçu le 21 Juin 1946).*

## Travaux cités

1. a) *Mathematical Reviews*, I (1940) MF 2401, pag. 314 (R. V. Churchill);
   b) *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, $66_1$ (1940), pag. 472 (F. Tricomi);
   c) *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, 23 (1941), pag. 41 (C. Miranda).
2. G. Doetsch. *Ein Zusammenhang zwischen Randwertaufgaben verschiedenen Typus.* Math. Z., 46 (1940), pag. 315–328.
3. Pour la terminologie adoptée, voir les «Conférences internationales sur les équations aux dérivées partielles». L'Enseignement Mathém., 35 (1936) et surtout les articles de M. J. Hadamard: *«Les conditions définies en général. Le cas hyperbolique»*, pag. 5–40 et de M. G. Doetsch: *«Les équations aux dérivées partielles du type parabolique»*, pag. 43–85.
4. L. Koschmieder. *Beziehungen zwischen Temperaturen und Potentialen.* Math. Z., 47 (1941), pag. 125–131.
5. V. Volterra & J. Pérès. *Théorie générale des fonctionnelles.* Paris, Gauthier-Villars (1936).
6. G. Doetsch. *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.* Berlin, J. Springer (1937).

# NOTES DE MÉCANIQUE RATIONNELLE. REMARQUES SUR LE PROBLÈME GÉNÉRALISANT CELUI DE LA CLOCHE ET SON BATTANT

par

D. I. MANGERON

1. Convaincu que le rôle de l'enseignement préparatoire des futurs ingénieurs, défini par une haute conscience scientifique et morale, est celui de «rattacher les notions utilisées dans les cours techniques à des principes aussi solides et aussi généraux que possible»[1]), j'ai développés, dans le cadre du cours de Mécaniques classiques (Mécanique newtonienne et Mécaniques relativistes) que je professe à l'Ecole Polytechnique de Jassy, quelques schémas mathématiques du chapitre fondamental de la physique théorique et expérimentale qui constituent certaines généralisations ou extentions des choses déjà principalement connues depuis longtemps du point de vue théorique mais qui présentent peut être de l'intérêt tant au point de vue de l'application des méthodes du Calcul numérique moderne quant au celui de l'exécution d'un nombre d'expériences nouvelles de laboratoire.

2. Dans une note récente[2]), j'ai établi le schéma mathématique d'un système articulé de corps rigides pesants généralisant le problème de la cloche et son battant.

Dans sa formulation la plus schématique ce problème se pose de la manière suivante :

Soient $C_1$, $C_2$, $C_3$, . . . . , $C_n$ $n$ corps rigides pesants suspendus l'un à l'autre par des axes parallèles entre eux que nous supposerons horizontaux, $O_1 z_1$, $O_2 z_2$, $O_3 z_3$, . . . , $O_{n-1} z_{n-1}$, de manière que l'axe $O_i z_i$ soit lié invariablement au corps $C_i$ et constitue en même temps l'axe de suspension pour le corps $C_{i+1}$. Le corps $C_1$ est lui aussi suspendu par un axe horizontal $O_0 z_0$ parallèle aux axes $O_i z_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$) et lié rigidement au monde extérieur.

Soient de même $O_0 x_0 y_0 z_0$ et $O_i x_i y_i z_i$ $n$ systèmes d'axes de coordonnées rectangulaires congruents entre eux, $O_0 x_0$ et $O_i x_i$ étant

des verticales descendantes. Supposons que tous les point $O_0, O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$ et que les centres de gravité $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ des corps considérés se trouvent dans un même plan vertical $x_0 O_0 y_0$ coïncidant d'ailleurs avec les plans $x_i O_i y_i$, et que de plus, le point $G_i$ se trouve situé sur l'axe $O_{i-1} O_i$.

Soient $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ les masses des corps considérés, $g$ la constante de gravité ; notons par $a_i = |\overline{O_{i-1} O_i}|$, $l_i = |\overline{O_{i-1} G_i}|$, par $\theta_i$ l'angle de l'axe $O_{i-1} O_i$ avec la verticale descendante, $\dot{\theta}_i$ et $\ddot{\theta}_i$ les dérivées de cet angle par rapport au temps $t$, et enfin par $k_i$ le rayon de giration du corps $C_i$ par rapport à l'axe $O_{i-1} z_{i-1}$.

Les équations cherchées du mouvement de ce système, déduites soit des méthodes euleriennes dans leurs formes vectorielles soit des méthodes lagrangiennes dans leurs formes scalaires, si l'on suppose les corps $C_i$ symétriques par rapport au plan vertical $x_0 O_0 y_0$, sont :

$$(l_{n-i} m_{n-i} + a_{n-i} m_{n-i+1} + a_{n-i} m_{n-i+2} + \ldots + a_{n-i} m_n) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{n-i} a_j \left[ \ddot{\theta}_j \cos(\theta_{n-i} - \theta_j) + \dot{\theta}_j^2 \sin(\theta_{n-i} - \theta_j) \right] + g \sin \theta_{n-i} \right\} +$$

$$(1_n) \qquad + m_{n-i} (k_{n-i}^2 - l_{n-i} a_{n-i}) \ddot{\theta}_{n-i} +$$

$$+ a_{n-i} \sum_{k=1}^{i} (l_{n-i+k} m_{n-i+k} + a_{n-i+k} m_{n-i+k+1} + a_{n-i+k} m_{n-i+k+2} +$$

$$+ \ldots + a_{n-i+k} m_n) [\ddot{\theta}_{n-i+k} \cos(\theta_{n-i} - \theta_{n-i+k}) +$$

$$+ \dot{\theta}^2_{n-i+k} \sin(\theta_{n-i} - \theta_{n-i+k})] = 0 ;$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

d'où il en résulte bien facilement le système d'équations différentielles linéaires dit des petites oscillations ($\theta_i \ll 1$), que constitue la première approximation du système $(1_n)$ et précisément :

$$(l_{n-i} m_{n-i} + a_{n-i} m_{n-i+1} + a_{n-i} m_{n-i+2} + \ldots + a_{n-i} m_n) \times$$

$$(2_n) \qquad \times \left[ \sum_{j=1}^{n-i} (a_j \ddot{\theta}_j + g \theta_{n-i}) \right] + m_{n-i} (k^2_{n-i} - l_{n-i} a_{n-i}) \ddot{\theta}_{n-i} +$$

$$+ a_{n-i} \sum_{k=1}^{i} (l_{n-i+k} m_{n-i+k} + a_{n-i+k} m_{n-i+k+1} + a_{n-i+k} m_{n-i+k+2} +$$

$$+ \ldots + a_{n-i} m_n) \ddot{\theta}_{n-i+k} = 0 ;$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dans sa formulation plus compliquée ce problème se lie avec celui de l'établissement du schéma concernant le choix des axes $O_i z_i$ de directions arbitraires dans l'espace ou bien avec cet autre concernant le mouvement des corps $C_i$ autour des points $O_i$, le point $O_0$ étant lié rigidement au monde extérieur [3]).

3. Mon intention était celle de développer dans ce Recueil quelques propriétés résultant de l'étude des équations $(2_n)$. La majeure partie des résultats que j'ai établi et préparé pour cette insertion pouvait être déduite comme cas spécial des mémoires célèbres de Henri Poincaré [4]), J. Horn [5]) et A. Liapounoff [6]). Puisque une partie de ces résultats a été élégamment présentée – quoique avec des notations et parfois même des méthodes un peu différentes – dans ces dernières années – comme suite à l'incitation de M. O. Perron – par M. G. Bradistilov [7]), qui a gagné de cette façon le mérite de priorité dans la démonstration explicite de l'existence de certaines solutions périodiques et asymptotiques dans le voisinage des points d'équilibre stable ou instable pour le pendule $n$-uple, je dois me limiter – dans l'attente des indications de la part de M. Bradistilov sur les sujets qu'il a éventuellement publiés dans les autres Recueils, dont je n'ai pas pu prendre connaissance jusqu'à ce moment – de présenter ici seulement quelques remarques que suit concernant les phénomènes régis par les systèmes d'équations $(1_n)$ ou $(2_n)$.

Le système $(2_n)$ généralisant celui de la cloche et son battant oscillera comme un corp rigide unitaire dans le cas où les égalités suivantes qui empiètent sur la construction du dit système articulé seront satisfaites:

$$
\begin{aligned}
&(l_{n-r}\, m_{n-r} + a_{n-r} m_{n-r+1} + a_{n-r}\, m_{n-r+2} + \ldots + a_{n-r}\, m_n) \times \\
&\times \Big\{ (\, l_{n-i}\, m_{n-i}\, a_{n-i}\, m_{n-i+1} + a_{n-i}\, m_{n-i+2} + \ldots + a_{n-i}\, m_n) \times \\
&\times \sum_{j=1}^{n-i} a_j + m_{n-i} (k_{n-i}^2 + l_{n-i}\, a_{n-i} + a_{n-i} \sum_{j=1}^{i} (l_{n-i+j}\, m_{n-i+j} + \\
&(3_n) \qquad + a_{n-i+j}\, m_{n-i+j+1} + a_{n-i+j}\, m_{n-i+j+2} + \ldots + a_{n-i+j}\, m_n) \Big\} = \\
&= (l_{n-i}\, m_{n-i} + a_{n-1}\, m_{n-i+1} + a_{n-i}\, m_{n-i+2} + \ldots + a_{n-i}\, m_n) \times \\
&\times \Big\{ (l_{n-r}\, m_{n-r} + a_{n-r}\, m_{n-r+1} + a_{n-r}\, m_{n-r+2} + \ldots + a_{n-r}\, m_n) \times \\
&\times \sum_{s=1}^{n-r} a_s + m_{n-r} (k_{n-r}^2 - l_{n-r}\, m_{n-r}) + a_{n-r} \sum_{s=1}^{r} (l_{n-r+s}\, m_{n-r+s} +
\end{aligned}
$$

$$+ a_{n-r+s}\, m_{n-r+s+1} + a_{n-r+s}\, m_{n-r+s+2} + \ldots + a_{n-r+s}\, m_n)\Big\},$$

où

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n-1).$$

Les conditions $(3_n)$ constituent les conditions nécessaires pour que les angles $\theta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soient égaux entre eux même pour les oscillations d'amplitude finies, c'est à dire pour le système $(1_n)$.

Des équations $(1_n)$, $(2_n)$ et $(3_n)$ il est bien facile d'en déduire les équations qui régissent les mouvements du pendule mathématique $n$-uple.

Pour le cas où $n = 3$, les équations $(1_n)$, $(2_n)$, $(3_n)$ se réduisent à :

$$\begin{aligned}
&a_1 l_3 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) + a_2 l_3 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) + k_3^2 \ddot{\theta}_3 + \\
&+ a_1 l_3 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_3 - \theta_1) + a_2 l_3 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_3 - \theta_2) + l_3 g \sin\theta_3 = 0, \\
&a_1 (l_2 m_2 + a_2 m_3) \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + (a^2{}_2 + k^2{}_2 m_2) \ddot{\theta}_2 + \\
&+ a_2 l_3 m_3 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + a_1 (l_2 m_2 + a_2 m_3) \dot{\theta}_1{}^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \\
&+ a_2 l_3 m_3 \dot{\theta}^2{}_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) + (l_2 m_2 + a_2 m_3) g \sin\theta_2 = 0, \\
&(a_1{}^2 m_2 + a_1{}^2 m_3 + m_1 k_1{}^2) \ddot{\theta}_1 + a_1 (l_2 m_2 + a_2 m_3) \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\
&+ a_1 l_3 m_3 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + a_1 (l_2 m_2 + a_2 m_3) \dot{\theta}_2{}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\
&+ a_1 l_3 m_3 \dot{\theta}_3{}^2 \sin(\theta_1 - \theta_3) + (l_1 m_1 + a_1 m_2 + a_1 m_3) g \sin\theta_1 = 0;
\end{aligned} \tag{1_3}$$

$$\begin{aligned}
&(a_1{}^2 m_2 + a_1{}^2 m_3 + m_1 k_1{}^2) \ddot{\theta}_1 + a_1 (l_2 m_2 + a_2 m_3) \ddot{\theta}_2 + a_1 l_3 m_3 \ddot{\theta}_3 + \\
&+ (l_1 m_1 + a_1 m_2 + a_1 m_3) g \theta_1 = 0, \\
&a_1 (l_2 m_2 + a_2 m_3) \ddot{\theta}_1 + (a_2{}^2 m_3 + m_2 k_2{}^2) \ddot{\theta}_2 + a_2 l_3 m_3 \ddot{\theta}_3 + \\
&+ (l_2 m_2 + a_2 m_3) g \theta_2 = 0, \\
&a_1 l_3 \ddot{\theta}_1 + a_2 l_3 \ddot{\theta}_2 + k_3{}^2 \ddot{\theta}_3 + l_3 g \theta_3 = 0;
\end{aligned} \tag{2_3}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{l_3 (a_1 + a_2) + k^2{}_3}{l_3} = \frac{a_1 l_2 m_2 + a_1 a_2 m_3 + a_2{}^2 m_3 + m_2 k_2{}^2 + a_2 l_3 m_3}{l_2 m_2 + a_2 m_3} = \\
&= \frac{a_1{}^2 m_2 + a_1{}^2 m_3 + m_1 k^2{}_1 + a_1 l_2 m_2 + a_1 a_2 m_3 + a_1 l_3 m_3}{l_1 m_1 + a_1 m_2 + a_1 m_3},
\end{aligned} \tag{3_3}$$

dont la discussion minutieuse présente assez d'intérêt promettant du point de vue mécanique, technique et même analytique et algébrique.

Pour le cas où $n = 2$, les équations $(1_n)$, $(2_n)$ et $(3_n)$ se réduisent aux équations ou bien aux conditions aujourd'hui classiques [8]).

*Séminaire Mathématique*
*de l'Ecole Polytechnique*
*de Jassy*

*(Reçu le 27 Septembre 1946).*

## Travaux cités

1. Ch. Platrier. - *Cours de Mécanique des Milieux continus déformables.* Ec. Nat. des Ponts & Chaussées. Préface, pag. 2. Paris (1944-1945).
2. D. Mangeron. - *Sur le mouvement de certains systèmes articulés de corps rigides pesants.* C. r. Acad. Sci. Paris, 223 (1946), pag. 190-191.
3. Pour le cas $n = 2$, voir : C. Agostinelli.- *Moto di due corpi rigidi collegati in un punto e di cui uno ha un punto fisso.* Atti Accad. Sci. Torino Cl. I, 75 (1940), pag. 249-263.
4. H. Poincaré.- *Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique.* Acta Math., 13 (1890), pag. 1-90.
5. J. Horn- *Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad.* Z. Math. & Phys. 47 (1902), pag. 400-428 et 48 (1903) pag. 400-434.
6. A. Liapounoff. - *Problème général de la stabilité du mouvement.* Ann. Fac. Sci. Toulouse, (2) 9 (1907), pag. 203-474.
7. G. Bradistilov.- *Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene.* Math. Ann., 116 (1939), pag. 180-203 ; 602-609.
8. Voir, par exemple, A. Föppl, -*Vorlesungen über technische Mechanik.* Bd. VI. *Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik.* 25. Glocke und Klöppel, pag. 131. B. G. Teubner, Leipzig (1910).

# CALCULS TOPOGRAPHIQUES A LA MACHINE DE CALCUL SANS LEVIER

par

ION IRIMESCU

Les publications qui se réfèrent aux calculs usités en topographie sont faites presque toujours à l'aide de la machine à levier. Et c'est dans un tout petit nombre des travaux ayant des sujets de cette nature qu'on se réfère à la machine sans levier [1]).

Dans ce qui va suivre je me propose de développer une méthode, à mon su inconnue, pour calculer une surface polygonale et pour résoudre le problème d'intersection topographique inverse.

Puisque, les calculs qui doivent être développés sont basés sur le calcul d'un produit d'une différence non effectuée par un nombre, je vais traiter tout d'abord cette question.

I. *La multiplication d'une différence par un nombre.*

Supposons qu'on dispose d'une machine sans levier, par exemple la machine du type Brunswiga.

Pour exécuter à cette machine une opération cumulée, par exemple multiplication d'une différence non effectuée avec un nombre, opération de la forme :

$$N=(a-b)\,c, \tag{1}$$

$a$ et $b$ étant positifs et différents de zéro et $c$ positif ou négatif, on procédera de la manière suivante :

a) Si $c<0$, alors on procède comme à la machine à levier, c'est à dire on commence par inscrire le premier terme de la différence dans l'enregistrateur des tours de manivelle en sec. On inscrit ensuite, dans le tableau inscripteur, le facteur qui multiplie la différence, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours, au lieu des chiffres du premier terme de la différence, les chiffres de son deuxième terme.

Le résultat s'obtient en totalisateur, qui peut être positif ou né-

gatif. S'il est négatif, alors on trouve au totalisateur un nombre étant précédé de plusieurs 9, qui s'appelle le complément du nombre. Pour obtenir le vrai nombre on retranchent des chiffres de 9 sauf la dernière de droite qu'on soustrait de *10*.

b) Si $c > 0$, alors on change le procédé, c'est à dire, on commence par inscrire le deuxième terme de la différence dans l'enregistrateur des tours, par tours de manivelle en sec, sauf le premier terme.

On inscrit ensuite dans le tableau inscripteur le facteur qui multiplie la différence, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours, au lieu des chiffres du deuxième terme de la différence, les chiffres de son premier terme.

Le résultat s'obtient en totalisateur, qui peut être positif ou négatif.

II. *Le calcul de la surface d'un polygone fermé, dont les sommets sont donnés par coordonnées topographiques dans le premier cadran.*

On suppose qu'on donne un pentagone par les coordonnées de ses sommets $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$, $A_4(x_4,y_4)$ et $A_5(x_5,y_5)$.

Pour calculer la surface de ce pentagone, on emploie la formule spéciale pour la machine de l'aire d'un polygone, qui est la suivante [2]:

$$2S = (x_5 - x_2)\,y_1 + (x_2 - x_4)\,y_3 + (x_4 - x_1)\,y_5 + (x_1 - x_3)\,y_2 + (x_3 - x_5)\,y_4, \tag{2}$$

$$-2S = (y_5 - y_2)\,x_1 + (y_2 - y_4)\,x_3 + (y_4 - y_1)\,x_5 + (y_1 - y_3)\,x_2 + (y_3 - y_5)\,x_4. \tag{2'}$$

Procédé de calcul:

Le calcul commence par le dernier terme de la formule (2), au lieu de commencer par le premier. Donc, on inscrit à l'enregistrateur des tours en sec la valeur de $x_5$, ensuite on inscrit dans le tableau inscripteur la valeur de $y_4$, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_3$, au lieu des chiffres de $x_5$. On inscrit au tableau inscripteur annulé la valeur de $y_2$, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_1$ au lieu des chiffres de $x_3$. Puis on inscrit au tableau inscripteur annulé la valeur de $y_5$, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_4$ au lieu des chiffres de $x_1$. On inscrit au tableau inscripteur annulé la valeur de $y_3$, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_2$ au lieu des chiffres de $x_4$. A la fin on inscrit au tableau inscripteur la valeur de $y_1$, et par tours de manivelle on fait

paraître dans l'enrigistrateur des tours les chiffres de $x_5$ au lieu des chiffres de $x_2$.

On obtient en totalisateur la valeur double de la surface du polygone donné, la moitié de ce nombre est la valeur de la surface polygonale considérée. On procède pareillement pour la formule (2') qui sert de contrôle.

On peut calculer de la même manière la surface de quelconque polygone donné par les coordonnées de ces sommets, ayant en vue la formule d'aire d'un polygone.

III. *Le calcul de l'intersection topographique inverse.*

(le problème de Pothénot)

Supposons qu'on connaît les coordonnées rectagulaires de trois points situés dans le premier cadran : $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$.

Grâce à eux, on peut calculer les coordonnées d'un quatrième point inconnu $P(x,y)$, dans lequel on fait station, en mesurant avec un théodolite les angles horizontaux :

$$\sphericalangle A_1 P A_2 = \alpha \qquad \text{et} \qquad \sphericalangle A_1 P A_3 = \beta.$$

Avec ces dates et en appliquant la formule classique de Delambre

$$tg\,\theta_1 = \frac{(x_2 - x_1)\operatorname{cotg}\alpha + (x_1 - x_3)\operatorname{cotg}\beta + y_3 - y_2}{(y_2 - y_1)\operatorname{cotg}\alpha + (y_1 - y_3)\operatorname{cotg}\beta - x_3 + x_2},$$

on pourra obtenir l'orientation de la direction $(A_1 P) = \theta_1$, d'où on peut facilement déduire les orientations :

$$(A_2 P) = \theta_2 = \theta_1 + \alpha \qquad \text{et} \qquad (A_3 P) = \theta_3 = \theta_1 + \beta,$$

après quoi on passe à un problème d'intersection directe.

Procédé de calcul pour tang :

a) On suppose que $\operatorname{cotg}\alpha < 0$ et $\operatorname{cotg}\beta < 0$, alors on procède à calculer le numérateur de la formule (3). On inscrit en sec à l'enregistrateur des tours la valeur de $x_2$, puis on inscrit au tableau inscripteur la valeur naturelle de $\operatorname{cotg}\alpha$, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_1$ au lieu des chiffres de $x_2$.

On inscrit au tableau inscripteur la valeur naturelle de $\operatorname{cotg}\beta$, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_3$ au lieu des chiffres de $x_1$. Puis on additionne $y_3$ et on soustrait $y_2$, en tenant compte de la virgule décimale des nombres donnés.

Le résultat s'obtient en totalisateur qui peut être positif ou négatif, dans le dernier cas son complément apparaît au totalisateur.

De la même manière on calcule le dénominateur de la formule (3).

Ensuite, on divise la valeur du numérateur par celle du dénominateur ou inversement, de sorte que le résultat de la division soit plus petit que l'unité. On cherche après dans les tables naturelles, colonne de la tangente ou cotangente, la valeur de l'angle.

b) Si cotg $\alpha > 0$ et cotg $\beta > 0$, on calcule le numérateur de la (3) de la manière suivante :

On inscrit en sec à l'enregistrateur des tours la valeur de $x_3$, et on inscrit au tableau inscripteur la valeur naturelle de cotg, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_1$ au lieu des chiffres de $x_3$. Puis on inscrit au tableau inscripteur la valeur naturelle de cotg, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_2$ au lieu des chiffres de $x_1$. On additionne ensuite $y_3$ et on soustrait $y_2$, en tenant compte de la virgule décimale des nombres donnés.

Le résultat de l'opération s'obtient en totalisateur qui peut être positif ou négatif. De la même manière, on calcule le dénominateur de la formule (3). Et on calcule le reste comme au point (a).

c) Si cotg $\alpha > 0$ et cotg $\beta < 0$, on procède alors comme il en suit : On inscrit en sec à l'enregistrateur des tours la valeur de $x_1$ du premier terme du numérateur de la formule (3). On inscrit au tableau inscripteur la valeur naturelle de cotg $\alpha$, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_2$ au lieu des chiffres de $x_1$. On annule le tableau inscripteur et l'enregistrateur des tours.

On inscrit en sec à l'enregistrateur des tours la valeur de $x_1$, puis on inscrit au tableau inscripteur la valeur naturelle de cotg $\beta$, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateure des tours les chiffres de $x_3$ au lieu des chiffres de $x_1$. Puis on additionne $y_3$ et on soustrait $y_2$. Le résultat on obtient en totalisateur qui peut être positif ou négatif. De la même manière, on calcule le dénominateur de la formule (3). Et on calcule le reste comme au point (a).

d). Si cotg $\alpha < 0$ et cotg $\beta > 0$, on inscrit en sec à l'enregistrateur des tours la valeur de $x_2$ du numérateur de la formule (3), et on inscrit au tableau inscripteur la valeur naturelle de cotg $\alpha$, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_1$ au lieu des chiffres de $x_2$. On annule le tableau inscripteur et l'enregistrateur des tours. On inscrit en sec à l'enregistrateur des tours la valeur de $x_3$ et puis on inscrit au tableau inscripteur la valeur naturelle de cotg $\beta$, et par tours de manivelle on fait paraître dans l'enregistrateur des tours les chiffres de $x_1$ au lieu des chiffres de $x_3$. On additionne enfin $y_3$ et on soustrait $y_2$.

On peut calculer de la même manière le dénominateur de la formule (3). Le reste de l'opération s'accomplit comme au point (a).

*Séminaire Mathématique*
*de l'Ecole Polytechnique*
*de Jassy*

*(Reçu le 30 Octobre 1946).*

## Travaux cités

1. M a r ţ i n i a n. – *Intersecţia indirectă.* Biblioteca Direcţiunei Cadastrului şi Cărţilor Funciare Nr. 2, Bucureşti, (1943).
M i h a i P. B o t e z – *Contribution dans le problème de l'intersection topographique inverse.* Ce „Bulletin", Vol. 1, Fasc. 1. (1946), pag. 170.
2. Voir, par exemple, O r ă ş a n u. – *Curs de Topografie*, Litografiat. Bucureşti, 1944.

# SUR LES CORRÉLATIONS ENTRE LE $p_H$, LA SALINITÉ ET LA CONCENTRATION DE L'OXYGÈNE DISSOUT DANS L'EAU DE LA MER NOIRE

par

VIRGILIU G. GHEORGHIU

et

NICOLAE CALINICENCO

I. Pendant l'époque 1935 - 38 on a fait une série de mesures sur les propriétés physiques de l'eau de la mer Noire, telles que: conductibilité électrique, densité, température, indice de réfraction, salinité, concentration de l'oxygène dissout, $p_H$, en étudiant en même temps les relations existantes entre ces propriétés, ainsi que leur variation en fonction des différents facteurs, comme: position, temps, profondeur, facteurs météorologiques, etc. Les résultats de ces études ont été en partie publiés [1]).

Dans le cadre de ces études on a fait aussi des mesures de $p_H$ et de salinité dans des conditions différentes. L'eau marine a été prise: soit à des époques différentes en un même point situé à la surface, près de la Station Zoologique Maritime „Regele Ferdinand I" d'Agigea (10 km., sud Constanța), soit à des époques déterminées, en différents points à la surface de la mer, sur les trajets suivis par les vaisseaux commerciaux entre Constanța-Balcic et Constanța-Sulina.

L'examen attentif des résultats expérimentaux obtenus dans ces mesures a montré, en général, une variation antagoniste du $p_H$ et de la salinité de l'eau marine.

Aussi des mesures faites sur la concentration de l'oxygène dissout dans l'eau marine, prise à la surface dans le même point qu'on a déjà mentionné, ont montré, en général, une variation du même sens que celle du $p_H$.

En continuant ces études, vu la multiplicité des facteurs déterminants les propriétés physiques de l'eau de la mer Noire, on s'est proposé d'étudier d'une manière plus rigoureuse les différentes corrélations

existantes entre ces propriétés, en employant à cet effet les méthodes de la Statistique Mathématique, qui ont été utilisées dans le dernier temps avec tant de succès dans les différents domaines de la science.

Dans le présent travail on a étudié les corrélations existantes entre la salinité, le $p_H$, et la concentration de l'oxygène dissout dans l'eau marine. On a utilisé à se but les mesures faites sur des échantillons pris dans un même point à la surface, près de la station maritime d'Agigea pendant l'époque 17 août - 4 septembre 1937.

Le $p_H$ de l'eau marine a été déterminé par la méthode électrométrique, en employant un nouveau modèle d'électrode à quinhydrone [2]).

La salinité a été mesuré par une méthode indirecte en déterminant la conductibilité électrique de l'eau marine avec un pont de Kohlrausch, et la concentration de l'oxygène dissout a été déterminée par la méthode colorimètrique en employant le tableau comparatif de Hoffer [3]).

Les erreurs absolues de mesure ont été respectivement de l'ordre: *0,01* unités pour le $p_H$, *0,1* gr. $^0/_{00}$ pour la salinité, et 1 cm.c. $^0/_{00}$ pour la concentration de l'oygène dissout.

Les valeurs numériques respectives obtenues, dont une partie a été déjà publiée [4]), sont rendues dans le tableau I.

Pour le calcul des coefficients de corrélation ($r$), on a employé la formule de Bravais:

$$r = \frac{\Sigma p\, \alpha_x \alpha_y}{n\, \sigma_x \sigma_y},$$ où $\alpha_x$ et $\alpha_y$ sont les écarts respectifs des éléments considérés $x$ et $y$ par rapport aux valeurs moyennes correspondantes, $p$ le nombre des échantillons qui ont les écarts $\alpha_x$ et $\alpha_y$. $x$ et $y$ représentent deux des trois grandeurs: salinité ($S$), concentration de l'oxygène dissout ($C$), et le $p_H$; $n$ est le nombre total des échantillons d'eau marine pris en considération; $\sigma_x$ et $\sigma_y$ les écarts quadratiques moyens respectifs.

La formule pratique employée pour le calcul de $r$ a été:

$$r = \frac{\Sigma p\, a_x a_y - n\, b_x b_y}{n\, \sigma_x \sigma_y},$$ où $p$ est le nombre des échantillons qui ont les mêmes écarts $a_x$, $b_y$ par rapport aux valeurs moyennes respectives provisoirement admises, $b_x$ et $b_y$ sont les écarts des moyennes provisoirement admises par rapport aux moyennes vraies, $n$, $\sigma_x$ et $\sigma_y$ ayant la même signification que plus haut. On a calculé aussi l'erreur quadratique moyenne $\varepsilon_m$ commise sur $r$ avec la formule de Pearson: $\varepsilon_m = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$. On admet, en général, que la

corrélation est sûre quand le rapport : $k = \frac{r}{\varepsilon_m}$ a une valeur d'au moins égal à 4 unités.

**Tableau I.**

| D date | H heure | S salin. | $p_H$ | C conc. $O_2$ | D date | H heure | S salin. | $p_H$ | C conc. $O_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 août | 9h. 30m. | 17,4 | 8,13 | 6 | 28 août | 9h. 15m. | 17,7 | 8,08 | 6 |
| 17 „ | 21h. 15m. | 17,7 | 7.88 | 5 | 28 „ | 12h. – m. | 17,8 | 8,07 | 6 |
| 18 „ | 9h. 15m. | 17,7 | 7,97 | 5 | 28 „ | 15h. 15m. | 17,8 | 8.01 | 5 |
| 18 „ | 12h. 45m. | 18,3 | 7,99 | 6 | 28 „ | 18h. —m. | 17,7 | 8,05 | 5 |
| 19 „ | 9h. 30m. | 17,8 | 8,15 | 6 | 28 „ | 21h. 30m. | 17,7 | 8,02 | 6 |
| 19 „ | 20h. —m. | 17,7 | 8,16 | 5 | 29 „ | 8h. —m. | 17,6 | 7,96 | 7 |
| 20 „ | 10h. 15m. | 18.2 | 8,13 | 6 | 29 „ | 20h. —m. | 16,8 | 8,16 | 6 |
| 20 „ | 20h. —m. | 17,8 | 8,10 | 5 | 30 „ | 6h. —m. | 15,0 | 8,20 | 7 |
| 21 „ | 9h. 45m. | 17,7 | 8,17 | 7 | 30 „ | 12h. —m. | 15,0 | 8,15 | 5 |
| 21 „ | 20h. 30m. | 17,5 | 8,17 | 7 | 30 „ | 21h. 15m. | 15,1 | 8,13 | 5 |
| 22 „ | 9h. —m. | 17,5 | 8,15 | 6 | 31 „ | 4h. —m. | 14,9 | 8,19 | 6 |
| 22 „ | 19h. 45m. | 17,4 | 8,18 | 7 | 31 „ | 9h. —m. | 14,9 | 8,26 | 5 |
| 23 „ | 8h. 30m. | 17,7 | 7,95 | 6 | 31 „ | 15h. —m. | 14,4 | 8,29 | 7 |
| 23 „ | 20h. —m. | 17,8 | 8,07 | 7 | 31 „ | 21h. 30m. | 14,6 | 8,04 | 5 |
| 24 „ | 9h. 15m. | 18,2 | 7,96 | 5 | 1 sept. | 9h. —m. | 15,0 | 8,11 | 7 |
| 24 „ | 20h. —m. | 18,0 | 8,13 | 6 | 1 „ | 20h. —m. | 14,9 | 8,29 | 6 |
| 25 „ | 8h. 45m. | 18,2 | 8,06 | 7 | 2 „ | 9h. —m. | 14,6 | 8,06 | 5 |
| 25 „ | 20h. —m. | 17,7 | 8,10 | 5 | 2 „ | 21h. 15m. | 14,6 | 8,17 | 5 |
| 26 „ | 9h. 45m. | 18,2 | 8,14 | 7 | 3 „ | 9h. —m. | 14,9 | 8,10 | 6 |
| 26 „ | 22h. 15m. | 17,1 | 8,10 | 5 | 3 „ | 22h. —m. | 14,4 | 8,06 | 7 |
| 27 „ | 9h. 15m. | 17,8 | 8,11 | 7 | 4 „ | 22h. 15m. | 17,6 | 8,24 | 6 |
| 27 „ | 20h. —m. | 17,7 | 8,10 | 6 | | | | | |

II. *Corrélation entre la salinité et le* $p_H$.

Du tableau numérique I on peut extraire les valeurs du $p_H$ et de la salinité des échantillons d'eau marine pris en considération, et les grouper dans le tableau de corrélation (II).

Pour calculer le coefficient de corrélation entre le $p_H$ et la salinité de l'eau de la mer Noire, on a introduit dans les compartiments du tableau de corrélation (II) les nombres respectifs des échantillons d'eau marine ayant les valeurs de la salinité et du $p_H$ comprise entre les limites indiquées par des caractères cursifs ; pour les compartiments on a pris comme valeurs moyennes celles indiquées par des caractères petits droits.

Dans les colonnes $n_{p_H}$ et $n_S$ on a noté le nombre des échantillons d'eau marine ayant respectivement le $p_H$ ou la salinité comprise

dans le même intervalle de variation, $n$ représentant le nombre total d'échantillons d'eau marine pris en considération.

**Tableau II.**

| | | 13,5 | 14,5 | 15,5 | 16,5 | 17,5 | 18,5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $S$ / $p$H | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | $n_{pH}$ |
| 7,85 | 7,9 | — | — | — | — | 1,5 | 1,5 |
| 7,95 | 8,0 | — | 1 | — | — | 7 | 8,0 |
| 8,05 | 8,1 | 1 | 4,5 | — | 2,25 | 12,25 | 20,0 |
| 8,15 | 8,2 | — | 3,5 | — | 2,75 | 4,25 | 10,5 |
| 8,25 | 8,3 | 1 | 2 | — | — | — | 3,0 |
| 8,35 | $n_S$ | 2,0 | 11,0 | — | 5,0 | 25,0 | $n = 43$ |

On doit observer que la valeur numérique du coefficient de corrélation dépend dans une certaine mesure de la grandeur prise pour les intervalles de variation correspondantes aux compartiments du tableau de corrélation, car en général les échantillons ne se répartisent pas d'une maniére uniforme ou symétrique dans l'intérieur d'un même compartiment. Pourtant, le calcul peut toujours indiquer l'existence ou non d'une corrélation, son signe et sa grandeur respective, quoique la valeur du coefficient de corrélation dépend dans une certaine mesure de la grandeur admise pour les intervalles de variation.

Dans le présent cas, le calcul montre une corrélation négative entre le $p_H$ et la salinité, donc une variation antagoniste de ces propriétés de l'eau marine, fait qui peut être observé aussi dans une certaine mesure par l'examen de la répartition des échantillons sur le tableau de corrélation (II). La valeur du coefficient de corrélation respectif a été : $r = -0{,}44$, avec $\varepsilon_m = 0{,}12$.

III. *Corrélation entre le $p_H$ et la concentration de l'oxygène dissout.*

Les valeurs numériques respectives du tableau I peuvent être groupées dans le tableau de corrélation III.

La calcul montre une corrélation positive entre le $p_H$ et la concentration de l'oxygène dissout dans l'eau marine. On a : $r = +0{,}31$

**Tableau III.**

| | | 4,5 | 5,5 | 6,5 | 7,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $C$ / $p^H$ | 5 | 6 | 7 | $^n p_H$ |
| 7,85 | 7,9 | 1 | 0,5 | — | 1,5 |
| 7,95 | 8,0 | 5,5 | 2,5 | — | 8,0 |
| 8,05 | 8,1 | 6 | 8 | 6 | 20,0 |
| 8,15 | 8,2 | 2,5 | 4 | 4 | 10,5 |
| 8,25 | 8,3 | 1 | 1 | 1 | 3,0 |
| 8,35 | $n_C$ | 16 | 16 | 11 | $n = 43$ |

et $\varepsilon_m = 0{,}14$. Comme dans le cas précédent, cette corrélation peut être encore observée dans une certaine mesure, par l'examen de la répartition des échantillons d'eau marine sur le tableau de corrélation.

IV. *Corrélation entre la salinité et la concentration de l'oxygène dissout.*

Les valeurs de la salinité et de la concentration de l'oxygène dissout des différents échantillons d'eau marine du tableau numérique I peuvent être groupées dans le tableau de corrélation IV.

Le calcul donne : $r = -0{,}04$ et $\varepsilon_m = 0{,}15$, ce qui indique qu'il n'y a pas de corrélation évidente entre la salinité et la concentration de l'oxygène dissout dans les échantillons d'eau marine examinés. En effet, la valeur de $\varepsilon_m$ dépasse de beaucoups celle de $r$.

V. *Corrélations partielles entre la salinité, le $p_H$ et la concentration de l'oxygène dissout.*

On peut encore étudier la corrélation existante entre deux des propriétés de l'eau marine, la troisième étant considérée constante. On introduit alors la notion de corrélation partielle, en notant la salinité, le $p_H$, et la concentration de l'oxygène dissout de l'eau marine, respectivement par les indices : *1, 2, 3*, en considérant les coefficients de

corrélation $r_{12,3}$; $r_{23,1}$; $r_{31,2}$, comme coefficients de corrélation partielle entre les deux premières propriétés, pour une valeur constante de la troisième. Ainsi, $r_{12,3}$ représente le coefficient de corrélation

**Tableau IV.**

| | | 4,5 | 5,5 | 6,5 | 7,5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | C / S | 5 | 6 | 7 | $n_S$ |
| 13,5 | 14 | — | — | 2 | 2 |
| 14,5 | 15 | 6 | 3 | 2 | 11 |
| 15,5 | 16 | — | — | — | — |
| 16,5 | 17 | 1 | 2,5 | 1,5 | 5 |
| 17,5 | 18 | 9 | 10,5 | 5,5 | 25 |
| 18,5 | $n_C$ | 16 | 16 | 11 | $n=43$ |

partielle entre la salinité et le $p_H$ des différents échantillons de d'eau marine pris en considération, qui ont une même concentration de l'oxygène dissout.

La formule employée pour calculer les coefficients de corrélation partielle est [5]:

$$r_{12,3} = \frac{r_{12} - r_{13}\, r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\,\sqrt{1 - r_{23}^2}}. \tag{1}$$

Elle a l'avantage de ne pas nécessiter l'existence d'une répartition des échatillons d'après la loi de Gauss, et aussi d'employer la totalité des données numériques pour calculer un coefficient de corrélation partielle, donc, elle subsiste pour un groupe d'échantillons sélectionés ayant une propriété constante, dont on ne peut posséder qu'un nombre restreint.

On peut ainsi calculer le coefficient de corrélation partielle entre la salinité et le $p_H$ des différents échantillons d'eau marine qui ont tous une même concentration de l'oxygène dissout.

En négligeant, en effet, en première approximation $r_{13}^2$, la formule (1) devient :

(2) $$r_{12,3} = \frac{r_{12} - r_{13}\, r_{23}}{\sqrt{1 - r_{23}^2}}.$$ Si on introduit pour $r_{12}$ et $r_{23}$ les valeurs respectives, on obtient $r_{12,3} = -0{,}45$.

On conclut donc que la corrélation entre le $p_H$ et la salinité de l'eau de la mer Noire est sensiblement la même, qu'on considère des échantillons d'eau marine ayant une même concentration de l'oxygène dissout, ou des concentrations différentes.

La même formule (1) donne :

(3) $$r_{23,1} = \frac{r_{23} - r_{12}\, r_{13}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}\,\sqrt{1 - r_{13}^2}},$$ et, en négligeant $r_{13}^2$, on a :

(4) $$r_{23,1} = \frac{r_{23} - r_{12}\, r_{13}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}}$$ ou, en introduisant les valeurs numériques respectives, on obtient : $r_{23,1} = +0{,}33$.

On doit donc conclure que la corrélation entre le $p_H$ et la concentration de l'oxygène dissout dans l'eau de la mer Noire est sensiblement la même, qu'on considère des échantillons d'eau marine ayant une même salinité, ou des salinités différentes.

Il n'est pas nécessaire de calculer le coefficient de corrélation partielle entre la salinité et la concentration de l'oxygène dissout dans l'eau de la mer Noire pour des échantillons d'eau marine qui ont tous un même $p_H$, car on a vu que l'erreur $\varepsilon_m = 0{,}15$ de $r_{13}$ dépasse de beaucoup sa propre valeur $r_{13} = -0{,}04$.

VI. *Interprétation des résultats obtenus.*

Les résultats obtenus dans l'étude présente faite sur les corrélations existantes entre la salinité, le $p_H$ et la concentration de l'oxygène dissout dans l'eau de la mer Noire, sont en concordance et peuvent s'expliquer, si on se réfère aux travaux déjà publiés [6]).

On a montré ainsi, que le $p_H$ de l'eau de la mer Noire est déterminé par l'équilibre acido-basique : bioxyde de carbone-bicarbonats dissouts dans l'eau marine. Cet équilibre, et par conséquent la valeur du $p_H$, dépend de plusieurs facteurs dont l'énumération suit.

a) La photosynthèse et la respiration des algues et du phytoplancton marin, qui ont une importance du premier ordre dans la détermination des variations du $p_H$ .

b) La circulation verticale, qui amène à la surface de l'eau marine plus saline des couches plus profondes, ayant un $p_H$ plus reduit, à cause de la diminution de l'intensité de la photosynthèse quand la profondeur augmente.

La salinité accrue diminue aussi, dans une certaine mesure, l'intensité de l'activité du peuplement vivant, en déterminant encore une diminution du $p_H$ [7]).

c) La circulation de surface, qui apporte de l'eau marine ayant soit une salinité et un $p_H$ différent, soit sensiblement une même salinité mais un $p_H$ différent, à cause de la variation de l'équilibre : bioxyde de carbone-bicarbonats dissouts dans l'eau marine.

Dans le premier cas, les variations du $p_H$ et de la salinité peuvent se produire dans un même sens ou dans un sens contraire, suivant les circonstances. Ainsi, l'eau peu saline du Danube et des grands fleuves (qui déversent leurs eaux dans la mer Noire et ont un $p_H$ sensiblement plus réduit) est amenée le long du littoral roumain par le courant marin superficiel de NNE-SSW, et doit produire une diminution simultanée de la salinité et du $p_H$ tant que l'eau douce (plus difficilement miscible avec l'eau marine à cause de la différence de densité) ne sera pas suffisamment mélangée avec cette dernière. D'ailleurs, ce fait n'a pas une importance marquée, à cause du pouvoir tampon assez notable de l'eau marine.

d) Les facteurs météorologiques tels que : précipitations atmosphériques, direction et intensité du vent, température, nébulosité, etc., dans les différents domaines de la mer Noire, ainsi que dans les régions voisines, qui ont un rôle indirect mais tout de même important dans la détermination des valeurs du $p_H$ et des autres propriétés physiques de l'eau de la mer Noire.

Un examen attentif des résultats expérimentaux montre en général une variation antagoniste du $p_H$ et de la salinité de l'eau de la mer Noire, fait qui a été confirmé dans le présent travail d'une manière rigoureuse, par l'emploi des méthodes de la Statistique Mathématique qui ont permis de calculer les coefficients de corrélation respectifs.

Cette corrélation négative entre le $p_H$ et la salinité de l'eau marine, peut s'expliquer en tenant compte des considérations faites plus haut, et en remarquant, qu'en général, l'eau marine ayant une salinité réduite, et par conséquent une densité plus faible, aura une tendance plus accentuée de se maintenir près de la surface que l'eau plus saline

et subira une action plus intense de la photosynthèse, qui conduira à un $p_H$ plus grand que celui de l'eau marine de profondeur.

L'eau marine plus saline, qui normalement ne peut pas se maintenir à la surface à cause de sa densité accrue, ne peut pas en général provenir que des profondeurs, d'où est apportée à la surface par la circulation verticale. Son $p_H$ sera réduit à cause de la diminution de l'intensité de la photosynthèse quand la profondeur augmente.

On voit donc, qu'en général, l'eau marine plus saline doit avoir un $p_H$ plus réduit, et que les variations du $p_H$ et de la salinité doivent être antagonistes, leurs coefficients de corrélation étant donc négatifs, fait confirmé par le calcul.

La corrélation positive entre le $p_H$ et la concentration de l'oxygène dissout dans l'eau marine, s'explique aussi en se rapportant aux mêmes considérations faites plus haut, en remarquant que l'oxygène dissout, étant un produit de la photosyntèse, sa concentration doit varier dans un même sens que le $p_H$.

La corrélation négative entre la salinité et la concentration de l'oxygène dissout dans l'eau marine pourrait s'expliquer, si cette corrélation existe réellement, par le fait que l'eau marine de faible salinité, ayant une densité réduite, aura une tendance plus marquée, de se maintenir à la surface et de s'oxygéner d'avantage, que l'eau plus saline de profondeur, et aussi par le fait que la solubilité des gaz, tels que l'oxygène, dans l'eau marine, diminue quand la salinité augmente.

VII. *Résumé et conclusions.*

Dans le présent travail, qui fait partie d'une série d'études sur les propriétés physiques de l'eau de la mer Noire, on a employé les méthodes de la Statistique Mathématique pour étudier les corrélations existantes entre la salinité, le $p_H$ et la concentrarion de l'oxygène dissout dans l'eau marine, prise à des époques différentes dans un même point situé à la surface, près de la Station Zoologique Maritime „Regele Ferdinand I" d'Agigea (10 km. sud de Constanța), pendant l'intervalle: 17 août-4 septembre 1937.

Pour calculer les coefficients de corrélation, on a employé la formule de Bravais. On a calculé aussi les coefficients de corrélation partielle entre ces trois éléments en employant une formule adéquate.

Des résultats obtenus, on a tiré les conclusions suivantes:

1. La corrélation entre la salinité et le $p_H$ de l'eau de la mer Noire prise à la surface est négative, avec un coefficient de corrélation: $r = -0{,}44$.

2. La corrélation entre le $p_H$ et la concentration de l'oxygène

dissout dans l'eau de la mer Noire est positive avec un coefficient: $r = +0{,}31$.

3. Il n'existe pas une corrélation évidente entre la salinité et la concentration de l'oxygène dissout dans la même eau marine.

4. Les coefficients de corrélation partielle entre: la salinité (1), le $p_H$ (2), et la concentration de l'oxygène dissout (3), ont dans les mêmes conditions, les valeurs respectives: $r_{1,23} = -0{,}45$; $r_{23,1} = +0{,}33$.

5. On a donné l'explication des corrélations constatées, en tenant compte des éléments déterminant les propriétés physiques de l'eau de la mer Noire, tels que: 1. circulation verticale et de surface de l'eau marine, 2. photosynthèse et respiration des algues et du phytoplancton marin, 3. facteurs météorologiques.

*Laboratoire de Physique et de Météorologie*
*Faculté d'Agronomie de l'École Polytechnique*
*de Jassy*

*(Reçu le 30 Septembre 1946).*

## Travaux cités

1) V. Gheorghiu et N. Calinicenco. „*La conductibilité électrique de l'eau de la mer Noire et des lacs littoraux. Sa variation en fonction du temps, de la position et de la profondeur*". Ann. Sc. Univ. Jassy, t. 23, p. 27–45, 1936.

„ „*Relations entre la salinité de l'eau de la mer Noire et la conductibilité électrique, la densité, ou l'indice de réfraction*". Ann. Sc. Univ. Jassy, t. 23, p. 222–251, 1937.

„ „*Etude sur la variation de la conductibilité électrique de l'eau de la mer Noire avec la température, et son emploi à la mesure de la température de l'eau marine*". Ann. Sc. Univ. Jassy, t. 26 p. 3–18, 1940.

„ „*Etude sur les propriétés physiques de l'eau de la mer Noire*". *Revue Générale de l'Electricité*, t. 48, p. 107–116, 1940.

„ „*Le $p_H$ de l'eau de la mer Noire, sa variation en fonction des différents facteurs et son pouvoir tampon*". C. R. Acad. Sc. Roum. t. 7, p. 52–58. 1943–45.

„ „*$p_H$-ul şi salinitatea apei Mării Negre*". Rev. Şt. „V. Adamachi", vol. 31, p. 262–263, 1945; vol. 32, p. 43–45 şi 127–129, 1946.

2) V. Gheorghiu. „*Un nouveau modèle d'électrode à quinhydrone et ses applications*". C. R. Acad. Sc. Roum. t. 5, p. 29–34, 1941.

3) et 4) V. Gheorghiu şi N. Calinicenco. „*Concentrarea oxigenului solvit în apa Mării Negre*". Rev. Şt. „V. Adamachi", t. 31, p. 262–265, 1945.

5) G. Darmois - *Statistique et applications* p. 142, Edit. A. Colin, Paris, 1934. Voir aussi :

T. L. Kelley - *Statistical Method.* The Macmillan Company, New-York, 1923.

H. L. Rietz - *Mathematical Statistics.* The Carus Mathematical Monographs, Number Three. The Open Court Company, London, 1927.

P. Riebesell - *Biometrik und Variationsstatistik.* Abderhalden Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden, Abt. V. Teil 2, Verlag Urban & Schwarzenberg, Berlin, 1925.

F. Baur - *Korrelationsrechnung.* Mathematisch-Physikalische Bibliotek, Bd. 75, Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1928.

A. A. Tschuprow - *Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie.* Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1925.

6) V. Gheorghiu et N. Calinicenco. „*Le $p_H$ de l'eau de la mer Noire, sa variation en fonction des différents facteurs et son pouvoir tampon*". Ann. Sc. Univ. Jassy, t. 30 (p. II) p. 87–119, 1944. Voir aussi note 1.

7) R. Legendre - *La concentration en ions d'hydrogène de l'eau de mer.* p. 148, Edit. Les Presses Universitaires de France, 1925.

# SUR LA VARIATION DU VOLUME DES ELEMENTS PARTICIPANTS DANS UNE REACTION CHIMIQUE : $a + b = c$[1])

par

I. N. CIOCHINĂ

Supposons que deux éléments chimiques $a$ et $b$ qui peuvent réagir ensemble, sont mis en présence,— en volumes conformément au rapport stochiométrique — mais, quand même, ne se combinent pas. Alors, il seront à *l'état de mélange.*

Par conséquent on aura :

(1) $$\boxed{V_a + V_b = V_m}\ ^*),$$

où $V_a$ = le volume de $a$ ; $V_b$ = le volume de $b$ et $V_m$ = le volume du mélange imaginaire de $a$ et $b$.

Mais si, au contraire, $a$ et $b$ se combinent, alors on aura :

(2) $$\boxed{V_a + V_b = V_c + \Delta V_m}.$$

C'est-à-dire que, par la combinaison chimique il y a une variation du volume des participants, de la limite $V_m$ jusqu'à la limite $V_c$, car, selon (1) et (2), on a :

(3) $$V_m = V_c + \Delta V_m,$$

d'où :

(4) $$V_m - V_c = \Delta V_m.$$

Les éléments $a$ et $b$, chacun séparément, subissent des variations du volume, et nous voulons montrer que ces variations, à $0^0\ C$ et à pression normale, suivent des règles précises qui peuvent présenter un intérêt autant pour la systématique chimique que pour la chimie analytique. Dans le tableau I de ci-dessout nous donnons quelques exemples :

---

*) Les corollaires importants sont représentés par des formules encadrées.

## TABLEAU I

| | $a$ | + | $b$ | = | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| et | $V_a$ | + | $V_b$ | = | $V_c$ |
| 1. | 1/2 $H_2$, gazeux | + | 1/2 $Cl_2$, gazeux | = | $HCl$, gazeux |
| | 11206 cmc. | + | 11206 cmc. | = | 22412 cmc. |
| 2. | 1/2 $H_2$, gazeux | + | $I$, solide | = | $HI$, gazeuz |
| | 11206 cmc. | + | 25,72 cmc. | = | 22412 cmc. |
| 3. | $C$, solide | + | $S$, solide | = | $CS_2$, gazeux |
| | 3,14 cmc. | + | 30,88 cmc. | = | 22412 cmc. |
| 4. | 3/2 $Cl_2$, gazeux | + | $Al$, solide | = | $AlCl_3$, solide |
| | 33618 cmc. | + | 9,13 cmc. | = | 55,37 cmc. |
| 5. | 5/2 $Cl_2$, gazeux | + | $W$, solide | = | $WCl_5$, solide |
| | 56030 cmc. | + | 9,41 cmc. | = | 93,35 cmc. |

Pour prouver que ce phénomène est général, nous avons arrangé le tableau II, et nous y avons exposé les variations des $V_a$, $V_b$ et $V_m$ des participants dans une réaction chimique (les chlorures, par ex.).

## TABLEAU II

| $b$ | $a$ | $V_a$ cmc. | $V_b$ cmc. | $V_m$ cmc. | $V_c$ cmc. | $\Delta V_m$ cmc. | $\Delta V_b$ cmc. | $\Delta V_a$ cmc. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Au**) | *Cl* | 11206 | 10 217 | 11216 217 | 31.44 | 11184,77 | 21,22 | —11174,56 |
| *Ag* | „ | „ | 10,27 | 11216,27 | 25,79 | 11190,48 | 15,32 | —11180,21 |
| *Cu* | „ | „ | 7,118 | 11213,129 | 28,05 | 11185,079 | 20,92 | —11177,95 |
| *Li* | „ | „ | 13,00 | 11219,00 | 20,49 | 11198,51 | 7,49 | —11185,51 |
| *Na* | „ | „ | 23,71 | 11229.71 | 26,94 | 11202,77 | 3,23 | —11179,06 |
| *K* | „ | „ | 45,46 | 11251.46 | 37,48 | 11213,98 | —7,98 | —11168,52 |
| *Rb* | „ | „ | 56,217 | 11262,217 | 43,82 | 11218,40 | —12,4 | —11162,18 |
| *Cs* | „ | „ | 71,02 | 11277,02 | 42,68 | 11234,34 | —28,34 | —11163.32 |
| *Be* | $Cl_2$ | 22412 | 4,87 | 22416,87 | 42,07 | 22374,80 | 37,20 | —22369,93 |
| *Mg* | „ | „ | 14,00 | 22426,00 | 41,05 | 22384,95 | 27,05 | —22370,95 |
| *Ca* | „ | „ | 25,85 | 22437,85 | 52,04 | 22385,81 | 26,19 | —22359,96 |
| *Sr* | „ | „ | 34,50 | 22446,50 | 80.89 | 22365,61 | 46,39 | —22331,11 |
| *Ba* | „ | „ | 38,15 | 22450,15 | 67,19 | 22882,96 | 29,04 | —22344,81 |
| *Zn* | „ | „ | 9,207 | 22421,21 | 46,67 | 22374,54 | 37,46 | —22365,33 |
| *Cd* | „ | „ | 14,16 | 22426,16 | 45,26 | 22380,90 | 31,10 | —22366,74 |
| *Hg* | „ | „ | 14,80 | 22426,80 | 50,09 | 22376,71 | 35,29 | —22361,91 |
| *La* | $Cl_3$ | 33618 | 22,77 | 33640,77 | 62,99 | 33578,68 | 39,32 | —33555,91 |
| *Ce* | „ | „ | 20,60 | 33638,60 | 63,04 | 33575,56 | 42,44 | —33554,96 |

*) Réaction hypothétique.

*(suite)*

| *b* | *a* | $V_a$ cmc. | $V_b$ cmc. | $V_{m_1}$ cmc. | $V_c$ cmc. | $V_m$ cmc. | $V_b$ cmc. | $V_a$ cmc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Sa* | $Cl_3$ | 33618 | 20,60 | 33638,60 | 63,04 | 33575,50 | 42,44 | −33554,9 |
| *B* | „ | „ | 6 25 | 33624.25 | 87,89 | 33536,79 | 81,21 | −33530,5 |
| *Al* | „ | „ | 9,97 | 33627,98 | 55,33 | 33572,65 | 45,35 | −33562,7 |
| *In* | „ | „ | 15,83 | 33633,83 | 63,92 | 33469.91 | 48,09 | −33055,0 |
| *Ti* | $Cl_4$ | 43824 | 10,64 | 44834,64 | 107,80 | 44726,84 | 92,16 | −44716,2 |
| *Th* | „ | „ | 20,18 | 44844,18 | 81,47 | 44762,71 | 61,29 | −44742,5 |
| *C* | „ | „ | 5,53 | 44827 41 | 94,26 | 44733,15 | 90,85 | −44720,7 |
| *Si* | „ | „ | 11,93 | 44885,93 | 114.79 | 44721,14 | 112,86 | −44709,2 |
| *Ge* | „ | „ | 13,57 | 44837,57 | 114,03 | 44723,51 | 100,46 | −44709,9 |
| *Sn* | „ | „ | 16,71 | 44740,71 | 114.27 | 44726,44 | 97,56 | −44709.7 |
| *pb* | „ | „ | 18,26 | 44842.24 | 109,74 | 44722,50 | 91,47 | −44714,2 |
| *Fe* | „ | „ | 7,10 | 22419,10 | 42,39 | 22419.71 | 35,29 | −22369,6 |
| *Co* | „ | „ | 6;79 | 22418,70 | 38,76 | 23379,94 | 32,06 | −22373,2 |
| *Ni* | „ | „ | 6,66 | 22418,66 | 50,62 | 22368,04 | 43,96 | −22361,3 |
| *I* | *H* | 11206 | 25,72 | 12231'72 | 22412 | −11180,28 | +22386,2 | +11206 |
| *CN* | „ | „ | 11206 | 22412 | „ | 0 | +11206 | „ |
| *Cl* | „ | „ | „ | „ | „ | „ | „ | „ |
| *S* | $H_2$ | 22412 | 15,47 | 22427,47 | „ | +15.47 | +22396,53 | 0 |
| *Se* | „ | „ | 15,50 | 22427,50 | „ | 15.5 | +22396.50 | 0 |
| *Te* | „ | „ | 20,43 | 22432.44 | „ | +20,44 | +22391,56 | 0 |
| *P* | $H_3$ | 33618 | 19,95 | 33634,85 | „ | +11222,95 | +22395,05 | −1126 |
| *As* | „ | „ | 13,19 | 33631,10 | „ | +11219,10 | +22398,90 | −1120 |
| *Sb* | „ | „ | 18,21 | 33636,21 | „ | +11244,21 | +22393,79 | −1120 |
| *C* | $H_4$ | 44824 | 6,82 | 44830,12 | „ | +6,82 | +22405,18 | −2241 |
| $N_3$ | *H* | 11206 | 33618 | 44824,00 | „ | +22412 | +11206 | +11206 |
| $N_2$ | $H_4$ | 44824 | 22412 | 67236 | „ | +44824 | 0 | −22412 |
| *S* | *N* | 11206 | 15,49 | 11221,49 | „ | −11190,51 | +22394,51 | +11206 |
| *Se* | *N* | 11206 | 15;5 | 11221,50 | „ | −11221,50 | +22396,50 | +11206 |
| $Al_2$ | $S_3$ | 18,26 | 10,23 | 28.49 | 63,65 | -35. 16 | +53,42 | +45,39 |
| *N* | $Cl_3$ | 33,618 | 11206 | 44824 | 22412 | −22412 | +11206 | −11206 |

Si nous systématisons les données du tableau II d'après la nature et le sens des variations, on obtient la classification et les notations suivantes :

$$\Delta V_m > 0 : + \Delta V_m$$
$$\Delta V_m < 0 : - \Delta V_m$$
$$\Delta V_m = 0$$
$$\Delta V_a > 0 : + \Delta V_a$$
$$\Delta V_a < 0 : - \Delta V_a$$

$$\Delta V_a = 0$$

$$\Delta V_b > 0 : + \Delta V_b$$

$$\Delta V_b < 0 : - \Delta V_b$$

$$\Delta V_b = 0.$$

Exposons plus bas les relations si intéressantes qui résultent de la comparaison des variations des différentes variables consignées dans le tableau II. Ainsi :

De la formule (1) et de la formule (4), après avoir fait l'addition, il résulte :

(5) $$V_a + V_b - V_c = \Delta V_m ,$$

et si :

(6) $$V_c - V_b = \Delta V_b ,$$

après l'addition des (5) et (6) on obtient :

(7) $$\Delta V_m + \Delta V_b = V_a ,$$

ou plus simplement :

(8) $$\Delta V_m = V_m - V_c , \quad \text{et}$$

(9) $$\Delta V_b = V_c - V_b .$$

Après l'addition des (8) et (9) on aura :

(10) $$\Delta V_m + \Delta V_b = V_m - V_b ,$$

et parce que

(11) $$V_m - V_b = V_a ,$$

il résulte :

(12) $$\Delta V_m + \Delta V_b = V_a .$$

En examinant le tableau II, on constate, en général :

(13) $$\boxed{\Delta V_m + \Delta V_b = n V_a} ,$$

où $n = 1, 2, 3, \ldots n$, indique le groupe chimique auquel appartient le participant *b*.

Les considérations ci-mentionnées s'appliquent également dans le cas où l'on considère le volume réel des participants à la réaction, c'est-à-dire sans covolume. Dans le tableau III nous consignons des données nécessaires au contrôle de la formule à volumes réels des participants dans la réaction.

## TABLEAU III

| $a$ | $b$ | $V_a$ | $V_b$ | $V_m$ | $V_c$ | $\Delta V_m$ | $\Delta V_a$ | $\Delta V_b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Cl* | *Au* | 22,2 | 10,20 | 32,40 | 31,14 | 1,26 | + 8,94 | + 20,9 |
| *Cl* | *Cu* | » | 7,11 | 29,31 | 28,05 | 1,26 | + 5,85 | + 20,94 |
| *Cl* | *Ag* | » | 10,27 | 32,47 | 25,81 | 6,66 | + 3,61 | + 15,54 |
| *Cl* | *Li* | » | 13,1 | 35,3 | 20,48 | 14,82 | — 1,72 | + 7,38 |
| *Cl* | *Na* | » | 23,7 | 45,9 | 26,94 | 18,97 | + 4,74 | + 3,24 |
| *Cl* | *K* | » | 45,46 | 67,66 | 37,46 | 30,20 | — 15,2 | — 8,00 |
| *Cl* | *Rb* | » | 56,25 | 78,50 | 43,82 | 34,69 | + 21,62 | — 12,43 |
| *Cl* | *Cs* | » | 71,03 | 03,23 | 42,19 | 51,04 | + 19,99 | — 28,81 |
| $Cl_2$ | *Hg* | 44,4 | 14,80 | 59,2 | 51,93 | 7,27 | + 7,53 | + 37,13 |
| $Cl_2$ | *Cd* | » | 13,00 | 57,42 | 43,03 | 14,39 | — 1,37 | + 30,01 |
| $Cl_2$ | *Mg* | » | 14,00 | 58,40 | 41 06 | 17,34 | — 3,34 | + 25,78 |
| $Cl_2$ | *Ca* | » | 25,82 | 70,24 | 51,52 | 18,62 | + 7,22 | + 25.78 |

De l'étude du tableau II, il résulte encore que :

(14) $$(\Delta V_a)^2 + (\Delta V_b)^2 \neq 0,$$

qui est caractéristique à toute réaction chimique ; et la conséquence logique en est alors :

(15) $$\Delta V_a = \Delta V_b = 0,$$

caractéristique à un mélange quelconque. Les équation (14) et (15) représentent les définitions justes pour différencier une réaction chimique d'un mélange.

Et encore si :

(8) $$\Delta V_m = V_m - V_c,$$

(5) $$\Delta V_m = V_a + V_b - V_c,$$

et parce que :

(16) $$V_a = V_c - \Delta V_a,$$

on a

(17) $$V_b = V_c - \Delta V_b.$$

On remplace les valeurs de $V_a$ et de $V_b$ données par les relations (16) et (17) dans (5) et on obtient :

(18) $$\Delta V_m = (V_c - \Delta V_a) + (V_c - \Delta V_b) - V_c.$$

Après les opérations respectives on obtient la valeur du $V_c$ comme il suit:

$$V_c = \Delta V_m + \Delta V_a + \Delta V_b ,$$

ou, si on considère le sens de la variation, on a, en général:

$$\boxed{V_c = (\pm \Delta V_m) + (\pm \Delta V_a) + (\pm \Delta V_b)} . \tag{19}$$

Et, encore, parce que:

$$(\pm \Delta V_m) + (\pm \Delta V_b) = V_a , \tag{20}$$

et, si on remplace la valeur du $(\pm \Delta V_m)$ de (20) dans (19), on obtient:

$$\boxed{(\pm \Delta V_a) + V_a = V_c} . \tag{21}$$

En suivant la même logique et par analogie:

$$(\pm \Delta V_m) + (\pm \Delta V_a) = V_b , \tag{22}$$

et si on remplace la valeur du $(\pm \Delta V_m)$ de (22) dans (19), on obtient:

$$\boxed{(\pm \Delta V_b) + V_b = V_c} . \tag{23}$$

Des (21) et (23), il résulte:

$$(\pm \Delta V_a) + V_a = (\Delta V_b) + V_b . \tag{24}$$

Si dans la formule: $V_c = \dfrac{P_c}{D_c}$,

où $V_c$ = le volume moléculaire du composé chimique $c$; $P_c$ = le poids moléculaire du $c$; et $D_c$ = la densité du $c$, on introduit les valeurs du $V_c$ de plus haut, on obtient:

$$(\pm V_m) + (\pm \Delta V_a) + (\pm \Delta V_b) = \frac{P_c}{D_c} ,$$

ou:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad D_c \left[ (\pm \Delta V_m) + (\pm \Delta V_a) + (\pm \Delta V_b) \right] = P_c , \\ &\text{b)} \quad \left[ (\pm \Delta V_a) + V_a \right] D_c = P_c , \\ &\text{c)} \quad \left[ (\pm \Delta V_b) + V_b \right] D_c = P_c . \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

De (25) il résulte également :

$$(\pm \Delta V_b) + V_b = \frac{P_c}{D_c},$$

d'où :

(26) $$\boxed{\pm \Delta V_b = \frac{P_c}{D_c} - V_b}$$

et aussi :

$$(\pm \Delta V_a) + V_a = \frac{P_c}{D_c},$$

d'où :

(27) $$\boxed{\pm \Delta V_a = \frac{P_c}{D_c} - V_a}.$$

L'étude analytique des variations du volume des participants conduit à d'autres conclusions assez importantes.

Le tableau II a été arrangé conformément aux valeurs croissantes du $\Delta V_m$. L'arrangement conduit à une concordance à peu-près exacte avec la systématique chimique (le tableau périodique des éléments chimiques), en ce qui regarde les éléments mono-et tétravalents.

Et parce que, entre $\Delta V_m$ et les autres variations, on établit les relations suivantes :

$$\Delta V_m = V_m - V_c,$$

$$\Delta V_m = V_a + V_b - V_c,$$

et encore :

$$V_a = V_c - \Delta V_a,$$

$$V_b = V_c - \Delta V_b,$$

ou encore :

$$\Delta V_m = (V_c - \Delta V_a) + (V_c - \Delta V_b) - V_c;$$

on a

$$\Delta V_m = V_c - (\pm \Delta V_a) - (\pm \Delta V_b).$$

On arrive, au bout de l'arrangement, à la conclusion suivante : entre des pareilles variations et la systématique chimique il existe une étroite liaison.

On ne peut pas confondre les variations du volume des éléments participants à une réaction avec une dilatation ou une contraction proprement dite. Quand même, ce phénomène peut être regardé comme un changement d'un état physique en un autre ou comme une striction ; et c'est ainsi qu'on comprend l'existence d'une liaison quelconque entre ses variations et la chaleur chimique qui résulte de la réaction. Dans le tableau IV on constate la liaison frappante entre les variations du volume des éléments qui changent d'état et la chaleur chimique respective.

## TABLEAU IV

La classification générale des réactions chimiques conformées aux variations du volume des participants.

| La variation du volume du : | | La nature des participants à la réaction | La nature de la combinaison chimique | La chaleur chimique de formation |
|---|---|---|---|---|
| $V_a$ | $V_b$ | | | |
| $+\Delta V_a$ | $-\Delta V_b$ | gaz + solide | solide | $+Q$ |
| $+\Delta V_a$ | $+\Delta V_b$ | gaz + (*R, Rb* + *Cs*) | „ | $+Q$ |
| $+\Delta V_a$ | $+\Delta V_b$ | gaz + gaz | liquide | $+Q$ |
| $+\Delta V_a$ | $+\Delta V_b$ | gaz + gaz | gazeux | $+Q$ |
| $+\Delta V_a$ | $-\Delta V_b$ | gaz + gaz | „ | $+Q$ |
| $\pm\Delta V_a = 0$ | $-\Delta V_b$ | gaz + solide | „ | $-Q$ |
| $+\Delta V_a$ | $+\Delta V_b$ | gaz + gaz | „ | $-Q$ |
| $+\Delta V_a$ | $-\Delta V_b$ | gaz + solide | „ | $-Q$ |
| $\pm\Delta V_a = 0$ | $+\Delta V_b$ | gaz + solide | „ | $-Q$ |
| $\pm\Delta V_a = 0$ | $-\Delta V_b$ | gaz + solide | „ | $-Q$ |
| $+\Delta V_a$ | $-\Delta V_b$ | gaz + solide | „ | $-Q$ |
| $+\Delta V_a$ | $-\Delta V_b$ | solide + solide | „ | $-Q$ |
| $\pm\Delta V_a = 0$ | $-\Delta V_b$ | solide + gaz | „ | $-Q$ |

($+Q$ = chaleur chimique livrée, réaction exothermique ; $-Q$ = chaleur chimique absorbée, réaction endothermique).

Dans le tableau IV sont représentées toutes les réactions chimiques que l'on vient de caractériser plus haut et où l'on constate que les conclusions déduites présentent un intérêt général.

C'est de ces variations du volume pendant la réaction qu'il faut tenir compte, quand on exécute des analyses „volumaires", par absorption ou par des agents sélectifs auxquels, par conséquent, il faut faire des corrections dans ce sens.

*Laboratoire d'Electrochimie de*
*l'Ecole Polytechnique de Jassy*

*(Reçu le 30 Octobre 1946).*

## Travaux cités

1) Voir aussi : I. Ciochină. *Sur la dilatation et la contraction des éléments participants dans une réaction chimique.* 37 pages. Imprimerie „Albina Romanească" - Jassy 1936.

# NOUVELLE THÉORIE SUR L'ORIGINE DE L'ENERGIE DANS UN SYSTÈME CHIMIQUE *)

par

I. CIOCHINĂ et C. CALISTRU

## II.

### 5. *L'énergie électrocinétique dans l'électrolyse.*

Le phénomène électrocinétique consiste dans le déplacement d'une particule électrisée (électron, ion, ion hydraté, gouttes ou particules de matière suscéptibles à fixer une ou plusieurs charges électriques élémentaires) dans un champ électrique.

L'énergie électrocinétique peut être mesurée en arrêtant les particules en mouvement par un champ antagoniste. Par ex : si l'on applique une différence de potentiel croissant et de sens inverse à une pile électrique en état de fonction, il arrive que les ions migrateurs sont amenés à l'état d'équilibre, et le courant recueilli par la pile s'annulle pour une valeur $E$ de la tension, à tel point qu'on peut y appliquer la formule que l'on emploie dans le phénomène photoélectrique, c'est-à-dire :

$$(1) \qquad \frac{1}{2} m v^2 = e_0 E \quad \text{(pour l'électron).}$$

*Si dans la formule (1) on remplace la vitesse $v$ par la mobilité $u$ de la particule, $E$ devient la tension pour le champ-unité $E_1$ et c'est ainsi qu'on arrive à des conclusions très intéressantes, que nous exposerons plus bas.*

L'énergie électrocinétique de l'ion migrateur est empruntée intégralement au champ électrique.

En désignant par $E_1$, le potentiel du champ-unité (1 volt/cm) ; par $m_1$ la masse de l'ion ; par $e_0$ la charge élémentaire de celui-ci et par $u$

*) La première partie a été publiée dans ce „Bulletin", I, Fasc. 1 (1946), pag. 72-92, sous le même titre.

la mobilité, nous pouvons exprimer l'état d'équilibre réalisé par le champ antagoniste comme il suit:

$$\frac{m_i u^2}{2} = e_0 E_1, \tag{2}$$

qui exprime *l'énergie acquise par l'ion dans le champ-unité*, où $E_1 = 1.10^8$. La formule (2) mène à une conclusion très importante, c'est-à-dire que:

*L'énergie électrocinétique acquise dans le champ-unité est la même pour toute particule électrisée: c'est une constante.*

Nous n'avons jusqu'à présent aucune connaissance sur la valeur de la masse de l'ion. La théorie de Debye présente l'ion dans sa marche vers l'électrode correspondante, comme un cortège d'ions de signe contraire ou comme une „atmosphère" d'ions autour de l'ion migrateur. Cette théorie nous donne l'impression que la masse de l'ion dans les électrolytes doit être très grande.

A l'aide du tableau [1]) qui indique les mobilités des ions dans les solutions aqueuses à différentes concentrations et à l'aide de la formule (2), on peut calculer la masse de l'ion migrateur.

Ainsi:

$$m_i = \frac{2 e_0 E_1}{u^2} \text{ gr}, \tag{3}$$

où $E_1$ est toujours 1 volt/cm. $= 1.10^8$ (*u.e.m.*).

## TABLEAU I

*Les mobilités des ions dans les solutions aqueuses à conc. différ.*

| Ion | Mobilité à 18° C | | | | Coeff. de la temp. % (100 ) |
|---|---|---|---|---|---|
| | $c = 0$ | $c = 0{,}001$ | $c = 0{,}01$ | $c = 0{,}1$ | |
| $H^+$ | 0,315 | 0,312 | 0,307 | 0,294 | 1,54 |
| $Li^+$ | 0,0334 | 0,0325 | 0,0308 | 0,0272 | 2,65 |
| $Na^+$ | 0,0435 | 0,0424 | 0,0465 | 0,0364 | 2,34 |
| $K^+$ | 0,0646 | 0,0633 | 0,0607 | 0,0351 | 2,17 |
| $Cs^+$ | 0 0680 | 0,0666 | 0,0637 | 0 0580 | 2,12 |
| $Ag^+$ | 0,0543 | 0,0528 | 0,0502 | 0,0440 | 2,29 |
| $^1/_2\, Ca^{2+}$ | 0,0510 | 0,0480 | 0,0420 | 0,0320 | 2.54 |
| $^1/_2\, Sr^{2+}$ | 0,0510 | 0,0480 | 0 0420 | 0,0320 | 2,54 |
| $^1/_2\, Mg^{2+}$ | 0,0460 | 0,0420 | 0,0320 | 0,0260 | 2,54 |
| $^1/_2\, Zn^{2+}$ | 0,0460 | 0,0420 | 0,0320 | 0,0260 | 2.54 |
| $^1/_2\, Cu^{2+}$ | 0,0460 | 0,0420 | 0,0320 | 0,0260 | 2,54 |
| $OH^-$ | 0,1740 | 0,171 | 0,167 | 0,157 | 1,80 |
| $F^-$ | 0,0466 | 0,0455 | 0,0432 | 0,0380 | 2,38 |
| $Cl^-$ | 0,0655 | 0,0640 | 0,0615 | 0,0558 | 2,16 |
| $Br^-$ | 0,0670 | 0,0661 | 0,0637 | 0,0591 | 2,15 |
| $I^-$ | 0 0665 | 0,0649 | 0,0627 | 0,0588 | 2,13 |
| $NO_3^-$ | 0,0617 | 0 0604 | 0,0576 | 0,0508 | 2,05 |
| $CH_3 - CO_2^-$ | 0,0035 | 0,0323 | 0,0306 | 0,0262 | 2,40 |
| $^1/_2\, SO_4^-$ | 0,0683 | 0,0638 | (0.0555) | (0,0400) | 2,30 |

Dans le tableau II, colonne 2, nous donnons les valeurs de la masse de quelques ions, pous apprécier l'énorme différence entre la masse de l'ion dans une solution aqueuse, et la masse réelle de l'ion $m_r$ c'est-à-dire :

$$m_r = m_a \pm m_e,$$

où $m_a$ est la masse de l'atome et $m_e$ est la masse de l'électron ou des électrons perdus ou gagnés par l'atome qui s'ionise.

Si on introduit $m_r$ dans la formule (2), on obtient la vitesse maximum que pourrait atteindre l'ion. Ainsi ;

$$U_{max} = \sqrt{\frac{2e_0 E_1}{m_r}}. \tag{4}$$

De la formule (3) il résulte que pour l'électron ;

$$\frac{e}{m} = \frac{u^2}{2E_1}, \tag{5}$$

qui résume une définition intéressante du raport $\frac{e}{m}$.

**TABLEAU II**

| Cation | Conc. | Masse selon la formule (2) | $E_1$ lim / cm. | $u$ max. | La valeur de $u$ à $E$ lim/cm. et à 18° C. |
|---|---|---|---|---|---|
| $H^+$ | 0,000 | 3,214.10 −11 gr. | 1,30 | 1,39.10⁶ cm./sec. | 0,3780 |
| | 0,001 | 3,280 „ | | | 0,3744 |
| | 0,01 | 3,385 „ | $H_2O$ | | 0,3674 |
| | 0,1 | 3,700 „ | | | 0,4410 |
| $Li^+$ | 0,000 | 2,866.10−9 gr. | 4,21 | 5,274.10⁵ cm /sec. | 0,0684 |
| | 0,001 | 3,030 „ | | | 0,0662 |
| | 0,01 | 3,385 „ | $Cl\,Li$ | | 0,0631 |
| | 0,1 | 4,821 „ | | | 0,0526 |
| $Na^+$ | 0,000 | 1,683 „ | 4,24 | 2,898 „ | 0,0891 |
| | 0,001 | 1,783 „ | | | 0,0860 |
| | 0,01 | 1,940 „ | $Cl\,Na$ | | 0,0830 |
| | 0,1 | 2,420 „ | | | 0,0746 |
| $K^+$ | 0 000 | 7,630.10−10 gr, | 4,59 | 2,221 „ | 0,1375 |
| | 0,001 | 7,955 „ | | | 0,1348 |
| | 0,01 | 8,701 „ | $Cl\,K$ | | 0,1292 |
| | 0,1 | 10,500 „ | | | 0,1173 |

*(suite)*

| Cation | Conc. | Masse selon la formule (2) | $E_1$ lim / cm. | $u$ max. | La valeur de $u$ à $E_1$ lim/cm. et à 18° C. |
|---|---|---|---|---|---|
| *Cs* | 0,000 | 6,887.10 $^{10}$ gr. | 4,62 *Cl Cs* | 1,204 " | 0,1455 |
| | 0,001 | 7,182 " | | | 0,1412 |
| | 0,01 | 7,856 " | | | 0,1369 |
| | 0,1 | 9,470 " | | | 0,1241 |
| $Ag^+$ | 0,000 | 1,082.10$^{-9}$ gr. | 1,30 *Cl Ag* | 1,332 " | 0,0615 |
| | 0,001 | 1,144 " | | | 0,0604 |
| | 0,01 | 1,262 " | | | 0,0570 |
| | 0,1 | 1,648 " | | | 0,0501 |
| $1/2\ Ca^{2+}$ | 0,000 | 1,223 " | 4,13 $Cl_2\ Ca$ | 2,104 " | 0,0615 |
| | 0,001 | 1,383 " | | | 0,0960 |
| | 0,01 | 1,808 " | | | 0,0840 |
| | 0,1 | 3,119 " | | | 0,0640 |
| $1/2\ Mg^{2+}$ | 0,000 | 1,500 " | 3,28 $Cl_2\ Mg$ | 2,816 " | 0,0828 |
| | 0,001 | 1,808 " | | | 0,0756 |
| | 0,01 | 2,410 " | | | 0,0648 |
| | 0,1 | 4,800 " | | | 0,0468 |

| Anion | Conc. | Masse selon la formule (2) | $E_1$ lim/volt cm. | $u$ max. | La valeur de $u$ à $E_1$ lim/cm. et à 18° C. |
|---|---|---|---|---|---|
| $OH^-$ | 0,000 | 1,051.10$^{-10}$ gr. | 4,46 *Ha OH* | 3.367.10$^5$ cm /sec. | 0,3671 |
| | 0,001 | 1,088 " | | | 0,3608 |
| | 0,01 | 1,140 " | | | 0.3523 |
| | 0,1 | 1,290 » | | | 0,3512 |
| $F^-$ | 0,000 | 1,466.10$^{-9}$ gr. | 4,84 *F Na* | 3,186 " | 0,1025 |
| | 0,001 | 1,537 " | | | 0,1001 |
| | 0,01 | 1,683 " | | | 0,0950 |
| | 0,1 | 2,209 " | | | 0,0836 |
| $Cl^-$ | 0,000 | 7,417.10$^{-10}$ gr. | 4,24 *Cl Na* | 2,332 " | 0,1342 |
| | 0,001 | 7,850 " | | | 0,1312 |
| | 0,01 | 8,420 " | | | 0,1290 |
| | 0,1 | 1,000.10$^{-9}$ gr. | | | 0,1143 |

*(suite)*

| Anion | Conc. | Masse selon la formule (2) | $E_1$ lim/volt cm. | $u$ max. | La valeur de $u$ à $E_1$ lim/cm. et à 18° C. |
|---|---|---|---|---|---|
| $Br^-$ | 0,000 | 7,087.10 $^{10}$ gr. | 3,93 *Br Na* | 1.553 „ | 0,1340 |
| | 0,001 | 7,200 „ | | | 0,1320 |
| | 0 01 | 7,856 „ | | | 0,1280 |
| | 0,1 | 9,177 „ | | | 0,1180 |
| $I$ | 0,000 | 7,180 „ | 3,32 *I Na* | 1,233 „ | 0,1197 |
| | 0,001 | 7,620 „ | | | 0,1168 |
| | 0 01 | 8,096 „ | | | 0,1128 |
| | 0,1 | 9,400 „ | | | 0,1060 |
| $NO_3^-$ | 0,000 | 8,420 „ | | 1,764 „ | |
| | 0,001 | 8,700 „ | | | |
| | 0,01 | 9,613 „ | | | |
| | 0,1 | 1,233 10−9 | | | |
| $CH_3^- Co_2^-$ | 0,000 | 2,609.10−9 | | 1,808 „ | |
| | 0,001 | 3,030 „ | | | |
| | 0.01 | 4,611 „ | | | |
| $1/2\ SO_4^{2-}$ | 0,000 | 6,828.10−10 | | 1,561 „ | |
| | 0,001 | 8.000 „ | | | |
| | 0,01 | 1,050.10−9 | | | |
| | 0,1 | 1,900 „ | | | |
| L'électron | | Masse 0,9.10−27 | | $u$ à la volt/cm. 5,91.10$^7$ | |

De la formule (1) il résulte, comme nous l'avons déjà vu, que :

$$\frac{m_i\ u^2}{2} = 1{,}591.10^{-12} = K \text{ ergs} \quad \text{(constante)}. \tag{6}$$

Si on transforme en calories pro gr. atome le résultat de la formule (6), on obtient :

$$K\,\text{cal.} = \frac{1{,}591.10^{-12}\,6.06.10^{23}}{4{,}19.10^7} = \frac{9{,}7.10^{11}}{4{,}19{,}10^7} = \tag{7}$$

$$= 2{,}5033.10^4 = 23033\,\text{cal/gr. atome.}$$

Si à un champ-unité correspondent 23033 cal., quel sera le nombre

d'unités de champ électrique nécessaires pour $Q_{cal.}$, nombre que représente l'énergie où l'ion respectif commence à se mouvoir. $Q$ rapporté à l'énergie du champ-unité (7) nous donnera la réponse. Ainsi on arrive à une nouvelle formule pour la (7), qui est :

$$(8) \qquad \frac{Q}{n\frac{m_i u^2}{2}\ \text{cal./gr. atome}} = E \text{ lim. volt/cm.} \quad (n = \text{valence}).$$

$E$ lim volt/cm. représente la force électromotrice à 18° C., grâce à laquelle on peut décomposer le sel dont procède l'ion respectif et qui est lié par une énergie équivalente à $Q_{cal.}$.

Les données de la colonne 3 du tableau II nous renseignent que :

a) l'hypothèse de Debye pourrait correspondre à la réalité,

b) qu'en vertu de la concentration, le cortège des ions de signe contraire croît et par cela même l'on explique la relation qui existe entre la résistance électrique (conductibilité) et la concentration dans les solutions aqueuses des électrolytes (v. tab. I et II).

Du raisonnement ci-mentionné on en déduit que la force électromotrice doit être exprimée en volt/cm.

Dans la lueur du raisonnement que nous venons d'exposer, la relation entre notre formule et les autres formules pour le calcul de la f. ém. dans l'électrolyse serait :

a). — Si nous notons l'énergie nécessaire pour la décomposition de l'électrolyte par $Q_{cal.}$, on aura :

$$(9) \qquad n\frac{m_i u^2}{2} E\, N.\, 2{,}389.10^{-8} = e_0\, N.\, E.\, 2{,}389.10^{-8} = Q,$$

$(N = 6{,}06.10^{23})$,

d'où, la f. ém. de décomposition «$E$ lim volt/cm.» de l'électrolyte sera :

$$(10) \qquad E \text{ lim volt/cm.} = n\frac{m_i v^2}{2 e_0},$$

$(v = u\sqrt{E} \longleftrightarrow$ où $v^2 = u^2 E)$.

Des formules (8), (9) et (10) il résulte aussi :

$$(11) \qquad E \text{ lim volt/cm.} = \frac{Q}{n\frac{m_i u^2}{2} N.2{,}389.10^{-8}} = \frac{Q}{23033.\, n}.$$

Cette formule (11) représente la liaison entre notre formule et la formule de Thomson.

b).— La relation entre notre formule et la formule de Gibbs et Helmholtz, est exprimée comme il suit :

$$(12) \qquad E \text{ lim volt / cm.} = \frac{Q + FT\frac{dE}{dT}}{n\frac{m_i u^2}{2} N.2{,}389.10^{-8}} = \frac{Q + FT\frac{dE}{dT}}{23033.n}.$$

c).—Enfin, la liaison entre notre formule et les formules de Nernst et Van't Hoff, résulte du fait que la mobilité de l'ion décroît quand la concentration de l'électrolyte croît. Ce phénomène doit exercer également une influence sur la conductibilité resp. la résistivité de la solution électrolytique. Par conséquent :

$$(13) \qquad E \text{ lim volt/cm.} = \frac{Q}{\frac{n.m_i.u^2.N}{2.4,19.10^7}} = \frac{RT}{n.F}\log\frac{P}{p} = \frac{RT}{n.F}\log\frac{C_{01}\,C_2}{C_{02}\,C_1}.$$

Ainsi l'éxactitude de la nouvelle formule est évidente.

*Par le plongement des électrodes dans la cuve électrolytique, on établi simultanément deux points où le champ électrique, c'est-à-dire magnétique, diffère au moins par son intensité. Alors il est facile à comprendre selon notre thèorie [1]) que les ions de l'électrolyte qui diffèrent entre eux par leurs intensités de magnétisation, se dirigeront vers les deux électrodes et c'est ainsi que le mécanisme de la dissociation est identique avec le mécanisme de la «dissociation forcée» qui est l'électrolyse proprement dite.*

*Laboratoire d'Electrochimie*
*près de la Faculté de Chimie Industrielle*
*de l'Ecole Polytechnique de Jassy*

*(Reçu le 30 Octobre 1946).*

## Travaux cités

1) I. Ciochină. - *Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique.* Ce „Bulletin", Vol. I, Fasc. 1 (1946), pag. 81-82.

# UN ARTIFICE DE CALCUL DANS L'ANALYSE CHIMIQUE

par

**CONSTANTIN STRUB**

La résolution des problèmes d'analyse chimique, une fois les données analytiques trouvées, se réduit à une ou plusieures règles de trois, ou bien à la détermination de la quatrième proportionnelle, une ou plusieurs fois, ce qui est la même chose.

L'analyse volumétrique, nécessitant des solutions titrées, dont la concentration ne résulte pas toujours d'une pesée, fera appel au mode de calcul déjà indiqué, avant même de la résolution proprement dite du problème, c'est à dire, pendant la préparation, respectivement, la calculation des concentrations des solutions avec lesquelles nous titrons.

La concentration d'une solution est, quelque fois, fonction de la concentration de deux, trois, ou même de plusieures solutions, c'est-à-dire que la concentration de la solution avec laquelle nous titrons la solution à analyser, se détermine par titration avec une autre solution, dont la concentration se détermine également par titration avec une troisième solution, et ainsi de suite.

En utilisant le système des notations proposé par nous (voir ce „Bulletin", Vol. I. Fasc. 1 (Janvier à Juin 1946), pag. 67-71), nous pouvons déduire, mécaniquement, par permutations circulaires, les expressions qui représentent les concentrations des solutions, sauf celles des premières deux solutions.

Par exemple :

Le Chlore actif d'une solution décolorante, se détermine par titration avec une solution d'anhydride arsénieuse 1/10 normal, dont la concentration se détermine aussi par titration avec une solution d'iode 1/10 normal, dont la concentration à son tour, a été déterminée avec une solution d'hyposulphite de sodium 1/10 normal ; la concentration de cette dernière solution peut être déterminée par la méthode au bichromate de potassium, ou à l'aide d'une solution de permanganate de

potassium 1/10 normal, dont la concentration a été aussi déterminée avec une quantité connue d'acide oxalique, d'oxalate d'ammonium, ou de sel ferreux.

Le but final étant le dosage du chlore actif, nous exprimerons les concentrations de toutes les solutions intermédiaires en chlore actif, en les notant ainsi :

$C^{Cl}_{As_2O_3}$ = la concentration de la solution d'anhydride arsénieuse 1/10 normal, exprimée en grammes de chlore;

$C^{Cl}_{I}$ = " " d'iode, exprimée en grammes de chlore;

$C^{Cl}_{Na_2S_2O_3}$ = " " d'hyposulphite de sodium 1/10 normal, exprimée en grammes de chlore ;

$a$ = la quantité en grammes de bichromate de potassium pesée;

ou encore :

$C^{Cl}_{KMnO_4}$ = la concentration de la solution de permanganate de potassium, 1/10 normal, exprimée en grammes de chlore ;

$a$ = la quantité en grammes d'acide oxalique cristalisé, pesée.

La concentration de la dernière solution étant connue ($C^{Cl}_{Na_2S_2O_3}$), la concentration de la solution suivante ($C^{Cl}_{I}$) sera déterminée comme d'habitude, en mesurant dans un flacon iodométrique $n_I$ cmc. de solution d'iode, etc. et titrant ensuite avec $n_{Na_2S_2O_3}$ cmc. d'hyposulphite de sodium. En exprimant les concentrations de ces deux solutions en grammes de chlore, la concentration de la solution d'iode résultera de l'égalité suivante :

$$n_{Na_2S_2O_3} . C^{Cl}_{Na_2S_2O_3} = n_I . C^{Cl}_{I},$$

d'où :

$$(1) \qquad C^{Cl}_{I} = \frac{n_{Na_2S_2O_3} . C^{Cl}_{Na_2S_2O_3}}{n_I} .$$

En déterminant ensuite, avec la solution d'iode connue, la solu-

tion d'anhydride arsénieuse, on pourra écrire l'expression de la concentration de celle-ci directement, en remplaçant, par permutations circulaires, les indices inférieurs de l'expression (1), par les indices inférieurs de la solution suivante, dans l'ordre dans lequel suivent les titrations ($-Na_2S_2O_3$, $-I$, $-As_2O_3$, — solution décolorante). C'est ainsi que si $n_I$ est le nombre de cmc. de solution d'iode mesurée dans le flacon iodométrique et $n_{As_2O_3}$ le nombre de cmc. de la solution d'anhydride arsénieuse utilisés à la titration, on peut écrire directement, abstraction faite des accents, l'expression de la concentration de la solution d'anhydride arsénieuse :

$$C^{Cl}_{As_2O_3} = \frac{n_I \cdot C^{Cl}_I}{n_{As_2O_3}}.$$

Si à présent, avec la solution d'anhydride arsénieuse on détermine, par la méthode directe, la concentration de la solution décolorante, celle-là sera représentée par l'expression suivante :

$$C^{Cl}_{Sol.décol.} = \frac{n_{As_2O_3} \cdot C^{Cl}_{As_2O_3}}{n_{Sol.décol.}},$$

dans laquelle $n_{Sol.\ décol.}$ représente le nombre de cmc. de la solution décolorante pris à l'analyse.

*Laboratoire de Chimie technologique organique de l'Ecole Polytechnique de Jassy*

*(Reçu le 30 Octobre 1946).*

# DENTOLOGIE DU LIÈVRE

par

EMIL BOLDUR

## *Considérations générales.*

*Développement.* De la lame dentaire, un long apaissement de l'épiderme gingivale de la face interne des maxillaires, prennent naissance par des bourgeonnements les folicules dentaires aux points où vont se former les dents. La folicule dentaire inclut une masse conjonctive, différenciée du tissu conjonctif voisin, en forme de bourse, unie à la lame dentaire par un mince pédicule. Cet organe possède une couche interne formée d'adamantoblastes qui produit la substance adamantine ou l'émail. Au centre de la bourse les cellules prennent l'aspect réticulé, la pulpe ou réticule de l'émail à laquelle est liée l'origine de la pulpe dentaire et de la dentine. Les cellules situées à l'extérieur des adamantoblastes, se disposent dans une couche externe des cellules différenciées, les odontoblastes, constituant la membrane de l'ivoire. Les odontoblastes secrètent une première couche d'ivoire ou dentine, à leur face externe, deposée en face des adamantoblastes. Après l'élaboration du premier tissu dur de la dent, suit la secretion de l'émail par les adamantoblastes; on observe aussi que se maintient une alternance dans la formation de l'ivoire et de l'émail.

L'entier folicule dentaire est enveloppé par un *sac dentaire* rézulté de la condensation du tissu conjonctif, qui produira par ossification la couche du ciment dentaire.

*Conformation.* Les dents sont des organes solidement implantées dans les alvéoles dentaires des maxillaires, par leur *racines*, tandis que la partie libre — la *couronne dentaire* — constitue dans l'ensemble la plaque ou table dentaire. Ces deux sont séparées par un étranglement intermédiaire.

Dans la constitution d'une dent on distingue les couches suivantes :

a) *L'émail*, disposé à la surface en une mince couche qui se perd à mesure qu'elle approche la pointe de la racine dentaire ;

b) *L'ivoire* ou *la dentine*, située sous la couche d'émail, constitue le corps de la dent (la substance fondamentale), dans la masse de laquelle se trouve creusé le *cornet dentaire interne* ;

c) *La pulpe dentaire*, remplit la cavité ou le cornet dentaire interne; dans sa constitution entre un complexe des vaisseaux sanguins et des nerfs, qui concourent à la nutrition de la dent ;

d) *Le ciment*, des environs de la racine, provient de l'ossification du sac fibreux de la pulpe dentaire. Dans quelques cas le ciment peut exister autant à la surface, que dans la cavité de la couronne (ciment coronnaire ou radiculaire) ;

e) *La ligament alvéolo-dentaire* (le périoste alvéolaire), constitue la soudure entre la dent et les parois alvéolaires.

Le lièvre possède le tableau dentaire suivant :

| | | |
|---|---|---|
| Maxillaire supérieur | $3\ 3\ 0\ \frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}\ 0\ 3\ 3$ |
| Maxillaire inférieur | $3\ 2\ 0\ 1$ | $1\ 0\ 2\ 3$ |

Le lièvre a une dentition analogue de celle du lapin domestique.

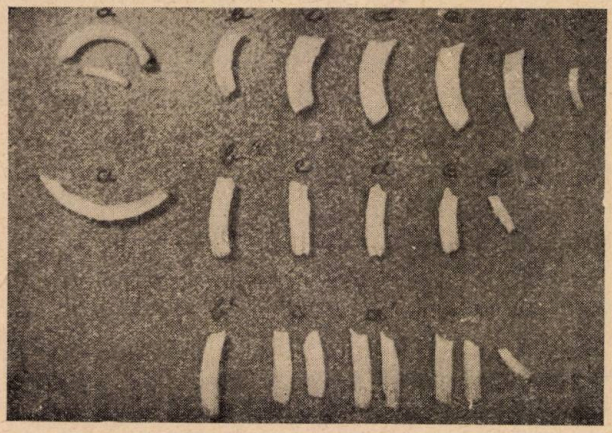

*Fig. 1.* – Les dents du lièvre (Lepus vulgaris, *Linné*).
*I.* a. Incisives supérieures principales et postérieures – b, c, d, prémolaires, – e, f, g, molaires supérieures.
*II.* a. Incisives inférieures – b, c, prémolaires – d, e, f, molaires inférieures.
*III.* b' – I. prémolaire ; c' – la seconde prémolaire détachée d' – la première molaire détachée ; e' – la seconde molaire détachée ; f – la troisième molaire.

Le nombre total des dents est 28 ; desquelles 6 incisives, 10 prémolaires

et 12 molaires. Entre les dents incisives et les prémolaires existe une espace *interalvéolaire* (diasthème), qui est pour le maxillaire supérieur d'environ 3 cm. de longueur et pour le maxillaire inférieur d'environ 2 cm. de longueur.

*La dentition du maxillaire supérieur.*

Les corps de l'intermaxillaire du lièvre présentent 2 grandes alvéoles dentaires, séparées par un riche *limbe alvéolaire*, dans lequel sont implantées 2 *grandes dents incisives* (les incisives principales ou antérieures).

Dans le voisinage immediat de la face postérieure des incisives antérieures, se trouvent deux autres alvéoles dentaires plus réduites, hébergeant 2 dents *incisives postérieures*, constituant une deuxième rangée des dents incisives petites.

*Les incisives* (fig. 1, a). Les incisives antérieures sont profondément implantées dans les grandes alvéoles, decrivant un arc de 25—28 mm. de longueur; sa concavité regardant en bas; 12 mm. de sa longueur représente la partie libre de la dent et 16 mm. la portion radiculaire.

La face labiale des dents incisives grandes supérieures (3 mm. de longueur) est couverte par une couche (environ 65 u.) de consistance plus dure (substance adamantine), délimitant une rigole médiane qui s'étend de l'extrémité libre de la dent jusque dans la région radiculaire, perdant très peu de sa grandeur.

La face linguale des dents incisives antéro-supérieures est plate (25 mm. de longueur), formée par une substance moins résistente, parceque la substance adamantine est répartisée dans une couche plus mince; par ce fait elle s'use plus rapidement que la couche de la face labiale.

Les faces latérales sont arrondies, l'externe laisse voire la délimitation nette des deux couches qui concourent à la constitution des faces antérieure et postérieure.

À la suite de l'usage de la couche postérieure de la masse dentaire, la partie antérieure plus dure reste moins usée; la dent prend ains la forme d'une „*pointe d'erminette*". C'est la cause que la surface usée a l'aspect d'une „*pointe de ciseau*" (haute de 1—1½ mm.); la partie horizontale apparaissant „*en marches d'escalier*" (larges de ¹/₄ mm.).

b. En continuation immédiate de la face postérieure des dent incisives principales se trouvent situées les deux petites incisives *(incisivi minores* ou *posteriores)* qui tombent sur les supérieures d'une façon oblique, se touchant entre elles au niveau de la marche dentaire des incisives supérieures (fig. 2). Le corps des dents incisives postérieures

est arrondi, ayant une longueur de 1 cm., 4 mm. de laquelle constitue la partie libre de la dent. La surface de frottement de la dent ressemble dans une certaine mesure à la forme des dents antérieures, avec la différence que la „pointe de ciseau" est plus réduite en comparaison avec „la partie en marche d'escalier", comprenant la plus grande partie de la surface.

Les incisives ont le corps uniforme sur toute l'étendue de la plaque dentaire jusqu'à leur racine, sans présenter aucun étranglement.

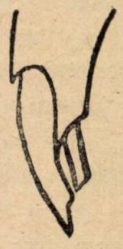

*Fig. 2*
Arthrésie dentaire incisive du lièvre.

Le canal ou cornet dentaire interne (*canalis radicis*) est largement ouvert dans la zone radiculaire, se terminant par un orifice de la pointe de la racine (*foramen apicis dentis*) ~ par lequel entrent les vaisseaux et les nerfs dentaires. C'est la cause que l'alimentation avec les substances nutritives des dents est maintenue continuellement à un niveau élevé, compensant ainsi leur usage provoqué par les frottements des plaques dentaires entre elles.

Les incisives sont des dents permanentes *(monophyodontia)*; ils ne changent pas.

B. *Les dents canines manquent.*

C. *Les prémolaires et les molaires.* Ces dents sont situées dans des alvéoles bien distinctes, distancées entre elles par des lames osseuses interalvéolaires solides, tandis que leur face externe est couverte d'une lame osseuse haute de 5 mm.

Leurs surfaces dentaires s'usent en plus grande mesure vers la face interne; vers la face externe elles restent plus élevées de 1-2 mm. La plaque dentaire permet d'observer la paroi d'invagination de la substance adamantine au centre de leur surface sous la forme d'une crête moins usée.

Ces dents sont plates dans le sens antéro-postérieur, de façon que ces surfaces sont plus grandes que les autres : l'externe et l'interne.

1. *Les prémolaires.* (fig. 1.—b, c, d.) sont représentées par 2 dents fortes pour chaque branche maxillaire.

a. La première prémolaire (fig. 1.—b.) est courbée de haut en bas, regardant avec la grande courbure en avant. Sa dimension chez l'adulte varie autour de 1,4 cm., en longueur, et 1 cm. en diamètre. La partie coronnaire est longue de 6 mm. à la face antérieure. Sur cette face elle présente deux sillons plus distincts qui correspondent à l'invagination de la substance adamantine, sans former une paroi séparatrice, puisqu'il n'existe qu'un seul canal radiculaire.

b. La seconde prémolaire (fig. 1.– b) a une forme courbée de la partie interne vers la partie externe, regardant avec sa petite courbure au dehors. Son diamètre est de 1,4 cm. et sa longueur de 1,9 cm., la couronne dentaire étant 4—5 mm. La face externe présente un sillon plus prononcé que la face interne, qui correspond à l'invagination partiale de l'émail.

c. La troisième molaire (fig. 1.—c) est ressemblante à seconde, mais différente par ses dimensions: le diamètre est de 1,5 cm., la longueur de 1,8 cm. (la partie coronnaire étant de 5—6 mm.).

*Les molaires* (fig. 1 – e, f, g.). Ces dents diffèrent très peu des dernières prémolaires; elles sont moins courbées.

a. La I-ière molaire (fig. 1—c.) suit la disposition des prémolaires, la courbure étant plus réduite; elle est la plus grande des dents molaires. Son diamètre est de 1,2 cm., la longueur de 1,8 cm, la cournne comprenant 4 mm.

b. La II-ième molaire (fig. 1—f) est moins volumineuse que la précédante; elle garde le même plan et la même forme. Le diamètre de cette dent est de 1,1 cm, sa longueur de 1,6 cm. (3½ mm. la couronne dentaire).

c. La III-ième molaire (fig, 1—g) est ia plus petite de la série des dents du maxillaire supérieur, suivant la même forme et courbure. Elle est formée par un seul corps dentaire, long de 9 mm. (la couronne est de 3 mm. et le diamètre de 5 mm.).

### *La dentition du maxillaire inférieur.*

Chaque branche mandibulaire possède à son extremité antérieure une alvéole dentaire dans laquelle s'implante une dent incisive inférieure, bien développée.

Les incisives du maxillaire inférieur sont longues (33 mm.), en forme d'arc, regardant en haut avec leur concavité et en bas avec leur face convexe; leur diamètre est de 1 cm. avec des variations sans importance.

La portion comprise dans l'alvéole dentaire *(radix dentis)* a une longueur de 2 cm. et diamètre de 1 cm,; elle est enveloppée dans un four *(le ligament alvéolo — dentaire)* qui fortifie la laison entre la dent et la paroi alvéolaire. — La partie libre représente la couronne de la dent (1—1,3 cm.) sans être délimitée par une strangulation. La surface de contact est coupée *„en ciseau"*, de la même façon que pour les dents incisives supérieures.

Dans les sections longitudinales, on peut distinguer les couches qui prennent part à la constitution de la dent (fig. 3).

La dent entière est couverte par une couche de ciment (fig. 3—b)

qui contribue à la fixité et à la fortification dentaire. Sous cette couche est située la *substance adamantine ou la couche d'émail* (fig. 3—c), qui atteint une plus grande épaisseur dans la région labiale de la dent en comparaison avec la couche qui couvre la face buccale; c'est là la cause que la plaque dentaire souffre une différence remarquable à l'usage. Ces deux couches se prolongent sur l'entière étendue de la dent.

Le centre de la dent, représentant le corps dentaire, est occuppé par *la couche d'ivoire* ou *dentine* (fig. 3 d.) qui apparaît au microscope plus dense vers la face labiale, intéressant seulement la région de la couronne de l'incisive, parceque les lamelles dentaires se perdent dans la paroi du cornet dentaire interne. La même disposition présente aussi la *couche d'émail interne* (fig. 3 — a) qui suit dans la succession des couches, délimitant, au centre de la dent, *la cavité du cornet dentaire externe* (fig. 3 — b).

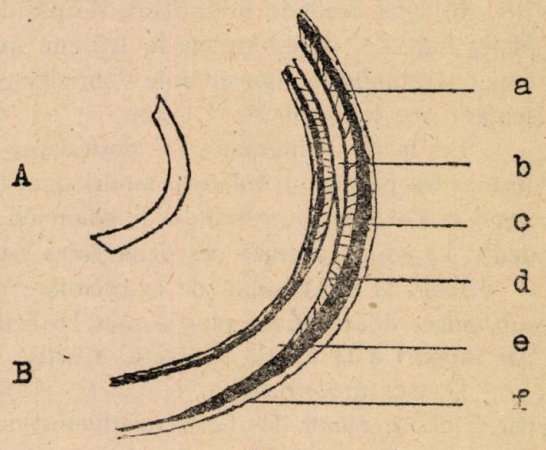


*Fig. 3*
Lièvre - section longitudinale des dents incisives

Le fond du cornet dentaire externe se dispose envers le cornet dentaire interne d'une manière légèrement externe, les deux cornets présentant ainsi une délimitation difficile à identifier.

*Le cornet dentaire interne (le canal radiculaire)* — (fig. 3 — e) de forme conique, a une longueur de 22 mm., contenant une pulpe très riche en éléments nerveux et sanguins, représentant ainsi une porte d'entrée de plusieurs filettes nerveuses et capillaires (6 — 10) pour l'alimentation de la dent.

B. *Les canines* manquent dans la dentition du lièvre.

C. Les prémolaires — sont en nombre de 2 (fig. 1 — b, c, deuxième rangée).

a) La première prémolaire est bien développée ayant une longueur de 1,8 cm., la partie coronnaire comprenant 6 mm. de longueur. Sa forme est ronde à la face interne, la face externe étant droite, sillonnée dans sa longueur par deux fosses qui correspondent à la segmentation interne du canal dentaire interne. Cette segmentation est complète en face de la fosse postérieure; on y observe un second cornet dentaire

interne postérieur qui à une pulpe à part. Le cornet dentaire interne — antérieur, ne souffre au niveau des sillons externes qu'une segmentation partielle, se réduisant à une invagination des lamelles dentaires de nature adamantine *(dentes lamellati)*. Ces invaginations de la substance adamantine font que la plaque dentaire s'use irrégulièrement, permettant de suivre sur la surface d'usage le dessin du tracé de cette substance.

b) — La seconde prémolaire résulte de la soudure des deux dents plates (fig. 1 – c), est longue de 1,5 cm. avec un diamètre total de 1,6 cm., qui remplissent une alvéole volumineuse, la partie radiculaire représentant une longueur de 1,1 cm.

Les faces — antérieure et postérieure — sont arrondies, imitant la forme des parois alvéolaires, tandis que les 2 faces latérales — l'interne et l'externe — présentent le sillon de délimitation entre les deux dents. La soudure entre ces deux faces est assez forte.

Dans la constitution de la première moitié de la dent entrent des substances adamantines plus denses. De cette façon elle reste plus élevée par rapport á la moitié suivante, à cause de l'usage de celle-ci.

D. *Les molaires* (fig. 1, a, e, f, — II-ième rangée) sont représentées par 3 dents, ayant des faces relativement droites. Les faces externe et interne possèdent la fosse de séparation des deux dents componentes, avec la même disposition que chez la dernière prémolaire.

a) — La première molaire est une dent à la conformation droite ayant une très petite déviation interne, longue de 1,5 cm. et avec un diamètre de 1,2 cm. Les deux individualités dentaires (fig. 1.) qui entrent dans la constitution dela première molaire s'unissent intimément entre elles surtout à la face interne, permettant de voir une fosse le long de la dent moins prononcée que celle de la face externe.

b) -- La seconde prémolaire a les mêmes caractéristiques que la première, seulement qu'elle est un peu plus courte, ayant une longueur de 1,4 cm., le diamètre restant de la même dimension (1,2 cm.).

c) — La dernière molaire est la plus petite de l'armature molaire, ayant une longueur de 8 mm. et un diamètre de 7 mm., avec une incurvation postérieure.

Elle présente les suites du sillon de séparation des deux individualités dentaires componentes, desquelles l'antérieure est la plus grande. Ces individualités dentaires componentes possédent une soudure forte entre elles.

*Faculté d'Agronomie*
*Cluj-Timişoara*

*(Reçu le 30 Octobre 1946)*

## Travaux cités

1. Eiiemberger-Baum — *Handbuch der Vergleichenden Anatomie der Haustiere*, Iulius Springer. Berlin, 1932.
2. Trautmann-Fiebiger — *Lehrbuch der Histologie und vergleichenden mikroskopischen Anatomie der Haustiere*, Paul Parey, Berlin, 1941.
3. A. Policard — *Précis d'Histologie physiologique.* (Collection Testut, Ed. Doin), Paris, 1928.
4. Bulliard-Champy — *Abrégé d'Histologie.* Paris, 1922.
5. Montane-Bourdelle — *Anatomie régionale des animaux domestiques*, (Ed. Baillière), Paris, 1913.
6. Drăgoiu Ioan — *Elemente de Istologie şi de tehnică microscopică*, (Ed. „Ardealul") Cluj, 1931.
7. Zimmermann Agoston — *A házinyul*, (M. Kir. Természettúdományi társ. kiadása) Budapest, 1927.

KERNYEI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

621, 313. 334

# LA THÉORIE DU QUADRIPÔLE APPLIQUÉE AU MOTEUR D'INDUCTION EN CASCADE AVEC UN COMPENSATEUR DE PHASE *)

par

CESAR PARTENI ANTONI et N. V. BOȚAN

Considérons un compensateur de phase qui est relié au rotor d'un moteur d'induction et alimenté par la tension de glissement produite par ce moteur.

Les équations d'un tel groupe peuvent être mises sous la forme suivante [1]:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathbf{U}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\,\mathbf{I}_1 + jM\omega\,\mathbf{I}_2 \\ 0 = (R_2 + R_3 - jK\omega')\,\mathbf{I}_2 + jg\omega(L_2 + \lambda + K)\,\mathbf{I}_2 + jMg\omega\,\mathbf{I}_1 \end{cases}$$

où:

- $g$ est le glissement,
- $\mathbf{I}_1$ et $\mathbf{I}_2$ les courants dans le stator et dans le rotor du moteur d'induction,
- $K$ une constante ayant les dimensions d'une self induction,
- $L_1$ et $L_2$ les inductances du stator et du rotor (valeurs globales cycliques),
- $M$ l'inductance mutuelle (globale cyclique) des deux enroulements,
- $R_1$ et $R_2$ les résistances effectives du stator et du rotor,
- $R_3$ la résistance de l'enroulement du compensateur,
- $\mathbf{U}_1$ la tension du réseau appliquée au stator du moteur d'induction,
- $\lambda$ la self-inductance effective de l'enroulement,
- $\omega$ la vitesse avec laquelle tourne l'induit dans le sens du champ d'alimentation.

*) Une note sur la même question a été présentée à l'Académie des Sciences de Roumanie. C. R. Ac. Sci. Roumanie, **7**, (1945), pag. 374–378.

Soit $\mathbf{U}_2$ la tension du rotor du moteur d'induction ; la deuxième équation du système (1) peut être mise sous la forme :

$$(2) \quad -\mathbf{U}_2 = -\frac{R_2 + R_3 - jK\omega'}{g}\mathbf{I}_2 = j(L_2+\lambda+K)\omega\mathbf{I}_2 + jM\omega\mathbf{I}_1.$$

Mettons :

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{Z}_1 = R_1 + jL_1\omega \\ \mathbf{Z}_2 = j(L_2+\lambda+K)\omega \end{cases}$$

où $\mathbf{Z}_1$ et $\mathbf{Z}_2$ représentent des impédances.

Introduisons les valeurs de (3) dans le système (1), en tenant compte de la valeur (2) ; on déduit :

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 + jM\omega\mathbf{I}_2$$
$$-\mathbf{U}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 + jM\omega\mathbf{I}_1.$$

De ce dernier système d'équations, on peut tirer les valeurs de $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{I}_1$. Soit :

$$(4) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_1 = j\dfrac{\mathbf{Z}_1}{M\omega}\mathbf{U}_2 + j\dfrac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + M^2\omega^2}{M\omega}\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_1 = j\dfrac{1}{M\omega}\mathbf{U}_2 + j\dfrac{\mathbf{Z}_2}{M\omega}\mathbf{I}_2. \end{cases}$$

Posons :

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{A} = j\dfrac{\mathbf{Z}_1}{M\omega} & \mathbf{B} = j\dfrac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + M^2\omega^2}{M\omega} \\ \mathbf{C} = \dfrac{j}{M\omega} & \mathbf{D} = j\dfrac{\mathbf{Z}_2}{M\omega}. \end{cases}$$

Entre ces quatre éléments on vérifie la relation :

$$\mathbf{A}\,\mathbf{D} - \mathbf{B}\,\mathbf{C} = 1$$

ce qui montre qu'un quadripôle peut représenter le système d'équations (4)[2] ; d'autre part, ce même système nous l'avons déduit du système (1) et par conséquent un moteur d'induction relié à un compensateur de phase constitue un ensemble qu'il est possible de représenter par un quadripôle.

De la théorie générale du quadripôle nous savons qu'on peut construire le schéma équivalent en $T$ de celui-ci, en posant :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} = \frac{j}{M\omega} ;$$

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{A}-1}{\mathbf{C}} = R_1 + j(L_1+M)\omega$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{D}-1}{\mathbf{C}} = j(L_2+\lambda+K+M)\omega$$

ce qui nous conduit à la figure 1.

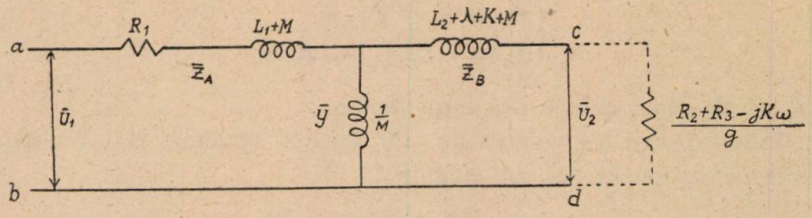


*Fig. 1*

Le schéma équivalent en Γ d'un moteur d'induction couplé en cascade avec un compensateur de phase.

En remplaçant $\mathbf{U}_2$ par sa valeur (2), on peut la représenter par la portion en pointillée, ce qui nous conduit à un dipôle, quand on regarde ce schéma du côté ab.

La valeur de $\mathbf{U}_2$ (2) peut être mise sous la forme:

(6) $$\mathbf{U}_2 = \zeta \mathbf{Z} \mathbf{I}_2 \text{ avec: } \mathbf{Z} = \frac{R_2 + R_3 - jK\omega'}{g}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\sqrt{(R_2+R_3)^2 + K^2\omega'^2}}{g} \; \underline{|-\psi}.$$

Calculons $\mathbf{I}_1$ des relations (4), (5) et (6); on obtient:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{U}_1 \frac{\mathbf{D} + \zeta \mathbf{C} \mathbf{Z}}{\mathbf{B} + \zeta \mathbf{A} \mathbf{Z}}.$$

On admet, en général, que la tension d'alimentation $\mathbf{U}_1$ est constante. Dans ces conditions, lorsque $\zeta$ varie, le lieu géométrique de l'extrémité du courant $\mathbf{I}_1$ est un cercle, suivant la théorie du dipôle [3]).

Pour tracer le cercle de fonctionnement, il faut calculer:

a) $\mathbf{I}_{10}$ le courant à vide. On obtient cette valeur en posant $\mathbf{I}_2 = 0$ dans la première équation du système (1):

$$\mathbf{I}_{10} = \frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{\mathbf{U}_1}{R_1 + jL_1\omega} = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2}} \; \underline{|-\psi_1}.$$

Nous avons aussi:

(7) $$\mathbf{Z}_1 = Z_1 \; \underline{|\psi_1}.$$

Dans la figure 2, prenons la valeur de $\mathbf{I}_{10}$ en $\overline{OA}$, ayant l'argument $\psi_1$.

b) Dans ce point $A$, la tangente au cercle aura la direction $T_{m+c}$, déterminée par l'angle $\delta_{m+c} = -(2\alpha + \psi)$ avec $OU_1$, où $\alpha$ est l'argument de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = A \underline{|\alpha}$) et $\psi$ l'argument de $\mathbf{Z}$.

Nous avons trouvé, (5) et (7):

$$\mathbf{A} = j\frac{\mathbf{Z}_1}{M\omega} = \frac{Z_1}{M\omega}\underline{\left|\frac{\pi}{2} + \psi_1\right.}, \text{ donc } \alpha = \frac{\pi}{2} + \psi_1.$$

La direction de la tangente sera déterminée par l'angle:

$$\delta_{m+c} = -(2\alpha + \psi) = -(\pi + 2\psi_1 + \psi).$$

Des relations (6) et (7), on tire:

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{K\omega'}{R_2 + R_3} \qquad \text{et} \qquad \psi = \operatorname{arctg}\frac{-K\omega'}{R_2 + R_3}$$

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{L_1\omega}{R_1} \qquad \text{et} \qquad \psi_1 = \operatorname{arctg}\frac{L_1\omega}{R_1}$$

$$\delta_{m+c} = -(\pi + 2\psi_1 + \psi) = -\left(\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{L_1\omega}{R_1} + \operatorname{arctg}\frac{-K\omega'}{R_2 + R_3}\right).$$

c) Le cercle doit passer aussi par le point correspondant à la marche en court-circuit, soit $\mathbf{U}_2 = 0$, qui donne le courant $\mathbf{I}_{1cc} = \overline{OB}_{m+c}$.

Du systéme (1), on déduit:

$$\mathbf{I}_{1cc} = \frac{\mathbf{U}_1}{R_1 + jL_3\omega} = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + L_3^2\,\omega^2}}\underline{|\beta_{m+c}}$$

avec:

$$L_3 = L_1 - \frac{M^2}{L_2 + \lambda + K}. \tag{8}$$

L'argument du $\mathbf{I}_{1cc}$ sera determiné par:

$$\operatorname{tg}\beta_{m+c} = \frac{L_3\omega}{R_1}.$$

Ayant les deux points $A$ et $B_{m+c}$ et la direction de la tangente $T_{m+c}$ en $A$, le cercle de fonctionnement du moteur avec compensateur est parfaitement déterminé.

Examinons maintenant le diagramme de fonctionnement du moteur d'induction seul, c'est-à-dire sans compensateur de phase.

L'un d'entre nous a étudié cette question [4]) et trouvé que le moteur jouit des propriétés d'un quadripôle.

Le cercle sera déterminé par les éléments suivants :

a') Courant à vide

$$\mathbf{I}'_{10} = \frac{\mathbf{U}_1}{R_1 + jL_1\,\omega} = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\,\omega^2}}\,\underline{|-\psi_1}$$

et par conséquent :

$$\mathbf{Z}_1 = Z_1\,\underline{|\psi_1}.$$

On observe que le courant à vide a la même valeur qu'auparavant :

$$\mathbf{I}_{10} = \mathbf{I}'_{10} = \overline{OA}.$$

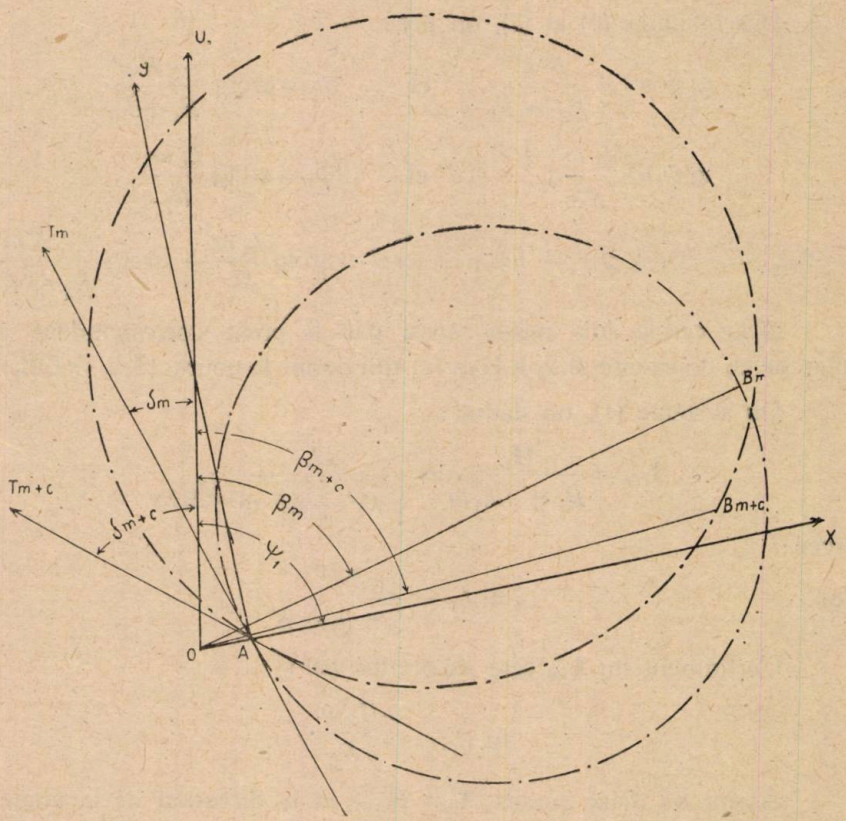


*Fig. 2*

Diagramme circulaire du moteur d'induction fonctionnant seul ou en cascade avec un compensatenr de phase.

b') La direction de la tangente au cercle $T_m$ dans le point $A$ sera :

$$\delta_m = -(2\alpha + \psi') = -(\pi + 2\psi_1 + \psi')$$

où $\psi'$ est l'argument de l'impédance $\mathbf{Z} = \frac{R_2}{g}$ et par conséquent $\operatorname{tg}\psi' = 0$ et $\psi' = 0$.

Nous aurons :

$$\delta_m = -(\pi + 2\psi_1) = -\left(\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{L_1\omega}{R_1}\right).$$

Si on compare cette valeur avec l'angle $\delta_{m+c}$ trouvé pour le fonctionnement du moteur avec compensateur, on observe que $\delta_m > \delta_{m+c}$.

c') Le courant de court-circuit $\overline{OB}_m$ sera :

$$\mathbf{I}'_{1cc} = \frac{\mathbf{U}_1}{R_1 + jL'_3\omega} = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + L'^2_3\omega^2}} \underline{|-\beta_m}$$

avec :

$$L'_3 = L_1 - \frac{M^2}{L_2}. \tag{9}$$

L'argument du courant de court-circuit sera donné par :

$$\operatorname{tg}\beta_m = \frac{L'_3\omega}{R_1}.$$

En comparant les valeurs de $L_3$ et $L'_3$, données par les relations (8) et (9), on observe que $L_3 > L'_3$.

Par conséquent on a $\beta_{m+c} > \beta_m$.

D'autre part si l'on compare les modules de $\mathbf{I}_{1cc}$ et $\mathbf{I}'_{1cc}$, on constate que $I_{1cc} < I'_{1cc}$.

En examinant les valeurs des angles $\psi_1$ et $\beta$ et en tenant compte de l'inégalité précédente entre $\beta_{m+c}$ et $\beta_m$, nous obtenons :

$$\psi_1 > \beta_{m+c} > \beta_m.$$

Nous sommes en possession de tous les éléments nécessaires pour pouvoir construire les diagrammes du moteur asynchrone sans et avec compensateur de phase.

Cette construction est donnée dans la fig. 2.

Prenons verticalement la direction de la tension d'alimentation.

Le courant à vide $\mathbf{I}_{10} = \mathbf{I}'_{10}$ est représenté par $\overline{OA}$, décalé en arrière de la tension $U_1$ d'un angle $\psi_1$. Les tangentes $T_m$ et $T_{m+c}$ au point $A$ doivent couper la direction $OU_1$, respectivement sous les angles $\delta_m$ et $\delta_{m+c}$ avec la relation $\delta_m > \delta_{m+c}$. Au lieu de ces angles, on peut prendre les différences $\delta'_m$ et $\delta'_{m+c}$ jusqu'à $2\pi$, soit :

$$\delta'_{m+c} = 2\pi - \delta_{m+c} \text{ et } \delta'_m = 2\pi - \delta_m$$

ce que nous conduit à la relation :

$$\delta'_{m+c} > \delta'_m.$$

On prend ensuite les courants de court-circuit $\mathbf{I}_{1cc} = \overline{O\,B_{m+c}}$ et $\mathbf{I}'_{1cc} = \overline{OB_m}$ décalés respectivement des angles $\beta_{m+c}$ et $\beta_m$ par rapport à la direction prise comme origine $OU_1$. On a les conditions trouvées précédemment :

$$\overline{OB}_{m+c} < \overline{OB}_m \quad \text{et} \quad \psi_1 > \beta_{m+c} > \beta_m .$$

On peut maintenant tracer les cercles $O_m$ et $O_{m+c}$, qui représentent les diagrammes des courants du moteur asynchrone fonctionnant seul ou en cascade avec un compensateur de phase.

Considérons maintenant un système d'axes rectangulaires, ayant l'origine dans le point $A$ et l'abscisse $Ax$ ayant été prise dans la direction de $OA$.

Supposons que le point $B_m$ a les coordonnées $x_m$ et $y_m$.

Le cercle $Om$ sera représenté par une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey = 0. \tag{10}$$

En posant la condition qu'il doit passer par le point $B_m$, nous aurons :

$$x_m^2 + y_m^2 + 2Dx_m + 2Ey_m = 0. \tag{11}$$

En remplaçant la valeur de $E$ tirée de (11) dans la relation (10), on a :

$$x^2 + y^2 + 2Dx - \frac{x_m^2 + y_m^2 + 2Dx_m}{y_m} y = 0.$$

L'équation de la tangente à l'origine $T_m$ sera obtenue, en annulant le groupe des termes de plus petit degré, soit :

$$2Dx = \frac{x_m^2 + y_m^2 + 2Dx_m}{y_m} y. \tag{12}$$

La tangente $T_m$ est déterminée, parcequ'elle passe par l'origine, ayant une direction connue. Elle peut donc être mise aussi sous la forme suivante :

$$y = m_m x. \tag{13}$$

Des relations (12) et (13) on a :

$$m_m = \frac{2y_m D}{x_m^2 + y_m^2 + 2Dx_m},$$

d'où

$$D = \frac{m_m (x_m^2 + y_m^2)}{2(y_m - m_m x_m)}.$$

L'équation du cercle sera :

$$(14)\quad f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{m_m(x_m^2+y_m^2)}{y_m - m_m x_m}x - \frac{x_m^2+y_m^2+\frac{m_m(x_m^2+y_m^2)x_m}{y_m - m_m x_m}}{y_m}y = 0.$$

Les coordonnées du centre de ce cercle seront données par les dérivées partielles

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

et en mettant l'équation (14) sous la forme :

$$x^2 + y^2 + A_1 x - B_1 y = 0,$$

on a :

$$2x_c + A_1 = 0$$
$$2y_c - B_1 = 0,$$

d'où l'on peut déduire les coordonnées du centre :

$$x_c = -\frac{A_1}{2} \quad \text{et} \quad y_c = \frac{B_1}{2}.$$

Le rayon du cercle sera donné par la relation :

$$R_m^2 = \frac{m_m^2 (x_m^2+y_m^2)^2}{4(y_m - m_m x_m)^2} + \frac{\left[x_m^2+y_m^2+\frac{m_m(x_m^2+y_m^2)x_m}{y_m - m_m x_m}\right]^2}{4y_m^2}.$$

Soit $d_m$ la distance entre $A$ et $B_m$ :

$$d_m = \sqrt{x_m^2+y_m^2}.$$

Le rayon $R_m$ sera :

$$R_m^2 = \frac{m_m^2 d_m^4}{4(y_m - m_m x_m)^2} + \frac{\left(d_m^2 + \frac{m_m d_m^2 x_m}{y_m - m_m x_m}\right)^2}{4y_m^2}.$$

Nous avons aussi :

$$x_m = d_m \cos \alpha_m$$
$$y_m = d_m \sin \alpha_m$$

et l'expression de $R_m$ devient :

$$R_m^2 = \frac{m_m^2 d_m^4}{4 d_m^2 (\sin \alpha_m - m_m \cos \alpha_m)^2} + \frac{\left(d_m^2 + \frac{m_m d_m^2 \cos \alpha_m}{\sin \alpha_m - m_m \cos \alpha_m}\right)^2}{4 d_m^2 \sin^2 \alpha_m} =$$

$$= d_m^2 \frac{m_m^2 + 1}{4 (\sin \alpha_m - m_m \cos \alpha_m)^2}.$$

De la même manière on peut obtenir l'expression du rayon $R_{m+c}$ pour le cercle passant par le point $B_{m+c}$, en remplaçant $d_m$ par $d_{m+c}$, $m_m$ par $m_{m+c}$ et $\alpha_m$ par $\alpha_{m+c}$. Nous avons :

$$R_{m+c}^2 = d_{m+c}^2 \frac{m_{m+c}^2 + 1}{4 (\sin \alpha_{m\ c} - m_{m+c} \cos \alpha_{m+c})^2}.$$

Comparons maintenant les rayons des cercles $R_m$ et $R_{m+c}$, représentant les diagrammes de fonctionnement d'un moteur asynchrone sans et avec compensateur de phase en cascade :

$$(15) \qquad \frac{R_{m+c}}{R_m} = \frac{d_{m+c}}{d_m} \sqrt{\frac{1 + m^2_{m+c}}{1 + m^2_m} \cdot \frac{\sin \alpha_m - m_m \cos \alpha_m}{\sin \alpha_{m+c} - m_m \cos \alpha_{m+c}}}.$$

Soit $\gamma_{m+c}$ l'angle de la tangente $T_{m+c}$ avec la direction de l'abcisse $Ax$. Dans le triangle $OAA'$ nous avons :

$$\pi - \gamma_{m+c} = 2\pi - (\delta'_{m+c} + \psi_1);$$

d'où :

$$\gamma_{m+c} = \psi_1 + \delta'_{m+c} - \pi.$$

Le coefficient angulaire $m_{m+c}$ sera :

$$m_{m+c} = \operatorname{tg} \gamma_{m+c} = \operatorname{tg} (\psi_1 + \delta'_{m+c}).$$

D'une manière analogue on calcule :

$$m_m = \operatorname{tg} \gamma_m = \operatorname{tg} (\psi_1 + \delta'_m).$$

Supposons l'angle $\psi_1$ plus petit que $90^0$, cas qu'on rencontre en général dans la pratique. D'autre part, nous avons trouvé $\delta'_m < \delta'_{m+c}$ ; par conséquent nous aurons :

$$(16) \qquad m_m < m_{m+c}.$$

En regardant la figure, on déduit immédiatement :

$$x_{m+c} = I_{1cc} \cos (\psi_1 - \beta_{m+c}) - I_{10}$$

$$y_{m+c} = I_{1cc} \sin (\psi_1 - \beta_{m+c}),$$

d'où :

$$d^2_{m+c} = x^2_{m+c} + y^2_{m+c} = I^2_{1cc} + I^2_{10} - 2 I_{1cc} I_{10} \cos (\psi_1 - \beta_{m+c}).$$

De la même façon, on obtient :

$$d^2_m = I'^2_{1cc} + I^2_{10} - 2 I'_{1cc} I_{10} \cos(\psi_1 - \beta_m).$$

Des discussions ci-dessus, nous avons établi les valeurs relatives des différents éléments qui entrent dans les deux dernières expressions, soit :

$I_{1cc} < I'_{1cc}$ et $\cos(\psi_1 - \beta_{m+c}) > \cos(\psi_1 - \beta_m)$ parceque $\beta_{m+c} > \beta_m$.

Si l'on compare les valeurs de $d_{m+c}$ et $d_m$ terme par terme et facteur par facteur, on déduit la relation suivante :

(17) $$d_m > d_{m+c}.$$

D'autre part :

$$\sin \alpha_{m+c} = \frac{y_{m+c}}{d_{m+c}} = \frac{I_{1cc} \sin(\psi_1 - \beta_{m+c})}{d_{m+c}}$$

$$\sin \alpha_m = \frac{y_m}{d_m} = \frac{I'_{1cc} \sin(\psi_1 - \beta_m)}{d_m}.$$

Parceque $\beta_{m+c} > \beta_m$, on a : $\sin(\psi_1 - \beta_{m+c}) < \sin(\psi_1 - \beta_m)$, l'angle $\psi_1 < \frac{\pi}{2}$.

Les deux facteurs du nominateur de $\sin \alpha_m$ sont plus grands que les autres, tandis que la situation est inverse pour le dénominateur. Dans ces hypothèses, on peut admettre :

(18) $$\sin \alpha_{m+c} < \sin \alpha_m.$$

En examinant maintenant l'expression (15), à l'aide des relations (16), (17) et (18), nous avons :

(19) $$\frac{d_{m+c}}{d_m} < 1, \quad \frac{1 + m^2_{m+c}}{1 + m^2_m} > 1 \text{ et } \frac{\sin \alpha_m - m_m \cos \alpha_m}{\sin \alpha_{m+c} - m_{m+c} \cos \alpha_{m+c}} > 1.$$

En général, on peut déduire la relation :

$$\frac{R_{m+c}}{R_m} > 1 \quad \text{ou} \quad R_{m+c} > R_m,$$

surtout parceque la dernière expression de la relation (19) est beaucoup plus grande que l'unité.

Par conséquent, on aboutit à la conclusion que dans le cas d'un moteur asynchrone couplé en cascade avec un compensateur de phase, le rayon du cercle, représentant le diagramme de fonctionnement, est plus grand que si le même moteur fonctionnait seul.

Cette conclusion, bien connue et obtenue par démonstration directe, a été déduite içi en assimilant le groupe, dont nous nous occupons, avec un quadripôle et en appliquant la théorie générale de celui-ci.

*Laboratoire de Machines électriques de l'Ecole Polytechnique de Jassy*

*(Reçu le 30 Octobre 1946)*

## Travaux cités

1. Jean Fallou. — *Leçons d'Electrotechnique générale.* Vol. II (1939), pag. 628. Paris, Gauthier-Villars.
2. Ibidem, *op. cit.* pag. 275.
3. Ibidem, *op. cit.* pag. 275.
4. Cesar Parteni Antoni.— *La théorie du quadripôle appliquée au moteur d'induction.* C. R. Acad. Sci. Roumanie **5** (1941), pag. 431—434.

# SUR L'AMÉLIORATION DES COURGES
## Recherches et méthodes.

par

ŞTEFAN POPESCO

On cultive les courges dans notre pays sur des étendues assez grandes, surtout dans les cultures de maïs; très rarement elles constituent des cultures separées.

Notre peuple aime les courges et les paysans les sélectionent en masse depuis longtemps. Mais malgré ces eforts, il n'en est pas résulté jusqu'à présent des sortes vraiment remarquables: riches au point de vue chimique, actives, précoces, productives.

Les sortes qu'on cultive, et leur rendement, ne nous étant pas indifférentes, notre Station d'amélioration des plantes a abordé, parmi les autres problèmes, l'amélioration des Cucurbitacées.

On cultive dans notre pays deux espèces de courges:

*Cucurbita Pepo* L. – la courge fourragère, connue en roumain sous le nom de „dovleac românesc" ou „dovleac porcesc".

*Cucurbita maxima* Duch – la courge comestible, connue en roumain sous le nom de „dovleac turcesc".

On rencontre trois variétés de courge fourragère, C. Pepo, chez nous:

la variété aux semences à tégument scléreux,

la variété aux semences sans tégument scléreux, fig. 1,

la variété courgette consommée à l'état jeune comme légume, connue sous le nom de „bostănel" ou „dovlecel".

*Cucurbita maxima* n'a pas donné de variétés sous notre climat et dans nos conditions de culture et sélection.

Toutes les espèces et variétés de courges sont résistantes à la sécheresse et aux maladies cryptogamiques; elles sont tardives et peu productives; mais elles sont de bonnes plantes oléagineuses, bonnes plantes fourragères et même comestibles.

Le matériel de notre pays est, en réalité, peu varié, et en consé-

quence nous ne pouvons pas obtenir des résultats appréciables par voie de simple sélection; et même par voie d'hybridation nous soupçonnons qu'on ne peut pas obtenir des résultats parceque les courges étant des plantes allogames elles auraient pu donner de nouvelles races jusqu'à présent, mais elles n'en ont pas donné. Probablement que leur constitution génétique étant assez pauvre n'a pas permis la création de nouvelles races.

Cette pauvreté de races nous oblige de créer, par voie d'hybridation, de nouvelles races de courges: plus précoces, afin de pouvoir faire mûrir un nombre plus grand de fruits avant l'apparition des premiers givres d'automme; plus productives, plus riches en huile et en matière sèche, avec de bonnes propriétés culinaires, avec les tiges non coureuses - afin de pouvoir cultiver plus de pieds à l'hectare. Dans ce but nous avons fait de grandes séries d'hybridations entre les espèces et variétés existantes aujourd'hui dans notre pays, depuis l'année 1927 *).

Mais, pendant dix années, nous n'avons obtenu rien d'important qui puisse nous mettre sur la voie de quelques recherches scientifiques et réalisations pratiques sûres. Dès l'année 1937 seulement des traits plus clairs nous sont apparus pour des réalisations utiles.

La difficulté est due notamment au fait que les *C. maxima* ne s'hybrident pas avec les *C. Pepo*, fait établi par tous les laboratoirs; et pourtant on a assez d'indications d'une hybridation possible entre ces deux espèces.

*La méthode.* Notre but final est de produire une courge de *Cucurbita maxima* avec les semences nues (sans tégument scléreux). Il y a dans la nature de pareilles courges-var, *abyssinica*, mais c'est une forme sauvage et nous ne l'avons pas.

En poursuivant notre but, nous avons fait une série d'hybridations directes entre Cucurbita Pepo et C. maxima, et réciproquement. Mais tous les efforts sont vains car l'hybridation directe n'est pas possible. Très rarement on obtient une ou deux semences; mais chez les courges ont lieu bien des fois des phénomènes de parthénocarpie et d'apogamie.

Pour y réussir, la méthode qu'il faut adopter doit s'approcher de ce qui se passe dans la nature. En effet, dans la nature, les courges, comme toutes les plantes allogames, peuvent se croiser avec les hybrides de la première génération, $F_1$, qui se trouvent spontanément dans les champs.

*) N. Săulescu fait mention de nos préoccupations dans les travaux du congrès international d'agriculture de Bucarest, voir «La Roumanie Agricole», 1929.

Nous avons appliqué cette méthode pour la courge *maxima*, souvent avec de bons résultats, en l'hybridant avec le $F_1$ des variétés de *Cucurbita Pepo*: fourragère *x* courgette.

Les courges nécessitant de grandes étendues de terrain, nous n'avons pas eu le pouvoir de poursuivre la descendance de ces sortes d'hybrides, dans toute leur extension; nous nous sommes contentés seulement de produire et d'isoler les formes nouvelles qui apparaissent.

Nous avons employé ensuite ces formes comme des géniteurs, vu que les formes nouvelles, obtenues par hybridation, ayant les idioplasmes mobiles, pas bien fixées, favorisent mieux les hybridations qui nous intéressent.

Ayant besoin de géniteurs purs, autant que possible, nous avons appliqué la consanguinité, bien que cette méthode ne donne pas de bons résultats aux courges. Cependant les formations hybrides supportent mieux la consanguinité que les parents. Les générations que nous avons obtenues nous ont servi comme des géniteurs, avec de bons résultats: les séries *C. maxima* 4-33 et *C. Pepo* 4-37, avec leurs descendants, sont parmi les meilleurs.

*La technique d'hybridation* chez les courges est des plus simples: on couvre d'un tissu léger, dans la soirée, les fleurs, mâles et femelles, prêtes à être fécondées. On connait ces fleurs d'après leurs coloration jaunâtre. Le lendemain les fleurs s'ouvrent, mais leur épanouissement complet est entravé par le tissu. Et, parceque les fleurs de courge fécondent mieux après l'enlèvement de la rosée, quand la coupe florale n'est pas humide, il faut que nous arrangions de nouveau le tissu sur la corole, après son épanouissement complet. De cette manière les fleurs sont isolées et préparées pour la pollinisation.

Persuadés que les abeilles peuvent transporter le pollen à partir de 4-5 heures du matin, nous avons fait les pollinisations, bien des années, en commençant à cette heure matinale; mais nous avons observé que les meilleurs résultats sont obtenus par la pollinisation en commençant de 9 à 10 heures du matin.

La fécondation peut avoir lieu pendant toute la journée, jusqu'à la clôture de la coupe florale, et même le lendemain, si les fleurs sont restées sans être fécondées. Dans ce cas il n'est aucun empêchement d'ouvrir la coupe florale et de polliniser. Nous avons fait bien des fois cette opération avec de bons résultats *).

La fécondation dépend aussi de la qualité du pollen, car les meilleurs résultats ont été donnés par le pollen de couleur rougeâtre. A la

*) Fait relevé aussi par Sofronov.

suite de cette observation, il nous semble que le pollen à couleur jaune est moins actif et que l'âge du pollen joue aussi un rôle dans la fécondation des courges.

Nous sommes obligés de relever ces faits parceque Sofronov constate que les fleurs des courges sont aptes à être fécondées même dix heures avant leur épanouissement.

## 1. Hybridations entre des variétés et races de courges Cucurbita Pepo.

Chez nous on connaît un petit nombre de sortes de courges fourragères. Elles diffèrent d'après la forme du fruit-sphérique ou cylindrique; d'après la couleur du péricarpe: rouge, verdâtre, jaune-uniforme ou tachetée; d'après son aspect extérieur: lisse ou verruqueux; d'après le nombre des carpelles: 3 ou 4, et après d'autres caractères.

Chez les courgettes il existe des sortes en nombre encore plus petit. Elles diffèrent d'après la grandeur et la forme du fruit-plus longue ou plus courte, mais toujours cylindrique; d'après la couleur des tiges herbacées: plus foncée ou plus pâle; d'après la cavité du fruit: creuse ou pleine.

L'hybridation entre ces variétés et sortes est possible et la première génération, $F_1$, est fertile.

En premier lieu, nous a intéressée l'hybridation entre la courge fourragère à semence sans tégument scléreux et la courgette, dont les semences ont le tégument scléreux, afin de produire:

a) des courges fourragères à tige non coureuse, pour faciliter la culture de plusieurs pieds à l'hectare, rendant ainsi la culture plus rémunératrice;

b) des sortes précoces et productives, comme la courgette, afin d'obtenir un plus grand nombre des fruits mûrs á l'automne;

c) des fruits de courges fourragères avec le mésocarpe plus développé et la cavité interne pleine, comme chez la courgette;

d) des courgettes avec les semences nues-à téguments non scléreux;

e) des sortes à semences plus riches en huile.

La fécondation entre ces variétés étant assurée, nous avons obtenu toutes les formations que nous avons suivies.

*Hybrides primaires*

| | | |
|---|---|---|
| a. *Cucurbita Pepo* | x | *Cucurbita Pepo* |
| courgette | | fourragère |
| avec tégument scléreux | | sans tégument scléreux. |

Nous avons fait un petit nombre d'hybridations entre de pareilles variétés, parceque la fécondation est possible et les résultats sont les mêmes.

On obtient en $F_1$ des fruits avec les semences à tégument scléreux. Les séries: 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11 de 1937 sont les plus intéressantes, et donnent les mêmes résultats: la présence du tégument scléreux est dominante, et son absence est récessive.

Le fait le plus remarquable de ces hybridations c'est qu'on obtient, en $F_1$, quelquefois des fruits dont leurs semences ont le tégument crevassé, fig. 2.

En $F_2$ on obtient des plantes de courgette avec deux sortes de semences: avec tégument ou sans tégument scléreux.

Nous avons récolté à la suite de cette expérience deux sortes de courges comestibles: les unes avec la semence à tégument crevassé, fig. 2, et d'autres sans tégument scléreux, fig. 1.

La présence de ces deux formes nouvelles de courge nous donne la possibilité d'une nouvelle série d'expériences:

| | | |
|---|---|---|
| b. *Cucurbita Pepo* | x | *Cucurbita Pepo* |
| fourragère | | courgette |
| avec tégument scléreux et crevassé | | sans tégument scléreux. |

Les sèries, les plus typique, No. 12 et 13 de 1937, nous ont donné en $F_1$ des pieds de courge fourragère aves la semence sans tégument scléreux.

Ces deux expériences nous conduisent à la conclusion que les semences sans tégument scléreux portent des facteurs qui produisent des crevasses et des facteurs qui entravent la formation des téguments.

La crevasse du tégument, scléreux on non, notée dans l'expérience *b* nous montre que l'hybridation a lieu. Les séries 20 et 27 de 1935 nous confirment cette opinion: des plantes de $F_1$ avec le semences aux tégument crevassé, prises comme géniteurs, conduisent aux descendances avec les semences sans tégument scléreux.

Mais les résultats changent d'après la constitution des parents:

| | | |
|---|---|---|
| c. *Cucurbita Pepo* | x | *Cucurbita Pepo* |
| fourragère | | courgette |
| sans tégument scléreux | | avec tégument scléreux. |

De cette hybridation nous avons obtenu en $F_1$ des plantes avec les semences sans tégument scléreux, dont la forme de courgette I 3-37 est la plus remarquable.

Cette forme nous a servi nombre de fois comme géniteur, avec de bons résultats. Probablement que ces bons résultats sont dus à la vigueur de son pollen rouge.

En $F_2$ nous avons obtenu plusieurs formes: les descendances lo

et 469 de 1938 sont très actives, homozygotes, sans tégument scléreux; d'autres ont les entrenoeuds de la tige courts; et d'autres descendances ont la tige aux entrenoeuds longs, comme la courge fourragère, avec des semences à tégument scléreux ou non.

Du total des fruits analysés, 47 ont les semences à tégument scléreux et 54 sont sans tégument. Le rapport 1:1 nous montre qu'il existe un seul facteur mendelien pour rendre le tégument scléreux et notre hybridation a un caractère de rétrocroisement.

d. D'autres hybridations, de la même formation, donnent en $F_1$ de plantes ayant les semences à tégument scléreux.

La lignée 14-37 est la plus caractéristique; elle a produit en $F_2$ des plantes très variées en ce qui concerne: la forme et la grandeur du fruit, la longueur des tiges, l'aspect et la couleur du fruit.

Dans notre pays on trouve deux sortes de courges fourragères sans tégument scléreux:

les unes ont le fruit quelque peu cylindrique, petit, uniformément coloré en rouge ou jaune; la semence blanchâtre de différents grandeurs;

les autres ont un fruit sphérique, grand, panaché de rouge ou vert; la semence verdâtre, toujours plus grande que la précédente, aplatie.

La première sorte est beaucoup cultivée dans la steppe du Bărăgan; la seconde en Steiermark, Dalmatie, Jugoslavie, d'où elle a été introduite chez nous et s'est répandue dans les contrées du Sibiu et de Gorj.

Vu que toutes les sortes de courges sont introduites de l'Orient par voie de commerce, nous désignons ces deux variétés de courges fourragères d'après la contrée où elles se sont le plus répandues: la sorte avec la semence blanchâtre „courge de Ialomitza", et celle à semence verdâtre „courge de Dalmatie". Celle-ci a été étudiée par Tschermak.

L'existence de ces deux sortes de courges chez nous, aux caractères tranchants, nous a permis quelques recherches. En vérifiant, en même temps, quelques hypothèses et recherches antérieurs, nous avons fait, pendant l'été 1939, 44 hybridations et consaguinités des hybrides primaires et dérivés. De ces 44 hybrides, seulement 7 ont été viables; à peine 3 ont formé des semences fertiles; les autres 4 hybrides ont eu les semences steriles, et le reste de 37 fruits a succombé pendant leur développement.

Autrefois nous avons fait plus d'une centaine d'hybridations et consanguinitées, mais, proportionnellement, avec les mêmes résultats.

| | | |
|---|---|---|
| e. *Cucurbita Pepo*<br>Ialomitza | x | *Cucurbita Pepo*<br>Dalmatie |
| semence blanchâtre sans tégument | | semence verdâtre sans tégument. |

Nous avons obtenu en $F_1$ des courges avec les semences à tégument scléreux et crevassé ; parmi les crevasses on aperçoit en dessous la couche verte. En $F_2$ nous avons obtenu des formes à semence verte, sans tégument, et des formes à semence blanchâtre, avec tégument scléreux non crevassé.

Ces résultats nous mènent à la conclusion que la courge mère „Ialomitza" a des facteurs inhibiteurs.

*Hybrides dérivés.*

D'après nos recherches de ci-dessus il se dégage des faits qui attirent l'attention : les hybrides supportent mieux la consanguinité que leurs parents, bien que ceux-ci soient aussi une sorte d'hybride, les courges étant des plantes allogames ; les hybrides nous assurent une meilleure fécondation quand ils sont employés comme géniteurs.

En partant de ces considérations, nous avons fait des hybridations entre la meilleure formation hybride : $F_1$ 3-37 et les courges de Dalmatie.

| a. *Cucurbita Pepo* | x | *Cucurbita Pepo* |
|---|---|---|
| Dalmatie | | $F_1$ 3-37 |
| semence verdâtre sans tégument | | semence blanchâtre sans tégument. |

Nous avons obtenu en $F_1$, de la série I 3-38, des plantes au phénotype et fruits de Dalmatie, avec la semence plate, verte.

En $F_2$ nous avons obtenu les deux sortes des plantes : avec la semence à tégument et sans tégument.

En poursuivant cette formation en 1939, la série 127-39, nous avons obtenu de fruits pareils aux courgettes : grands, jaunes, pleins à l'intérieur, avec deux sortes de semences sans tégument : blanchâtre, comme chez la courge roumaine de Ialomitza, et verdâtre, comme chez la courge de Dalmatie. La forme des semences reste la même.

En poursuivant seulement les formes nouvelles, nous avons laissé de côté, pour le moment, l'analyse des produits de ségrégation et nous avons retenu et soumis à la sélection les formes des courges à semences sans tégument et à moelle avec la cavité du fruit pleine à l'intérieur.

L'hybridation inverse se comporte différement :

| b. *Cucurbita Pepo* | x | *Cucurbita Pepo* |
|---|---|---|
| $F_1$ 3-37 | | Dalmatie. |

La descendance I 7—38, de cette hybridation, nous a donné en $F_1$ des plantes et de fruits de courgette, pareils à la mère ; avec les semences semblables à ceux de la courge fourragère, aux téguments scléreux.

La descendance I 16 — 38 nous a donné en $F_1$ des fruits de courgette, pareils à la mère, mais avec la semence de couleur blanchâtre,

sans tégument scléreux. Cette descendance propagée par consanguinité, ayant pris toutes les mesures d'isolation, nous a donné des fruits à semence à tégument scléreux.

* * *

Comment peut-on expliquer des résultats si différents, de ces deux séries, quand les parents ont eu le même caractère-sans tégument scléreux?

Sans doute que le géniteur mère, étant hybride, a formé deux sortes d'ovules: les unes portent le facteur dominant pour la formation du tégument; d'autres sont purement récessives. Le père s'est montré toujours comme récessif.

En effet, en poursuivant la descendance de $F_2$, nous avons trouvé, de la part de I 7 — 38, une moitié des plantes avec la semence à tégument scléreux, et l'autre moitié à semence sans tégument; de la part de I 16 — 38 toute la descendance se présente homozygote, avec la semence sans tégument.

*Résultats et Conclusions*

De la totalité des hybridations, entre les variétés des courges Pepo, se détachent les faits suivants:

*La tige* herbacée des courges est en général longue de 7 à 8 m.; seulement la courgette a la tige tout à fait courte-de 1 m. de longueur.

Par hybridation nous avons obtenu des formes de courge fourragère avec la tige herbacée courte, de 1,50 m. à 1,40 m. Nous mentionnons que les tiges sont courtes mais les entrenoeuds sont plus longs que ceux de courgette.

En $F_2$ apparaissent aux champs, bien que rarement, des plantes de courge fourragère, ayant une forme ramassée, toute comme la courgette. Ces formes sont bien tardives; elles ne sont pas arrivées à la maturité.

*Le fruit.* La courgette est cylindrique et mince; la courge fourragère, que nous avons employée, est presque sphérique.

Comme résultats des hybridations on obtient des plantes des courges fourragères aux fruits grands et cylindriques, de couleur rougeâtre, et des plantes de courgettes aux fruits grands, cylindriques, de couleur jaune ou rouge.

La descendance de $F_2$ nous montre que la forme, la grandeur et la coloration des courges de Dalmatie dominent sur celles des courges de Ialomitza.

Les séries I 31 — 41 et I 155 — 39 ont donné encore des formes transgressives: plus petites que celles de courge fourragère.

Les courges présentent une cavité dans l'intérieur de leur fruit; la courgette seulement peut avoir le fruit plein-fruit à moelle.

A la suite des hybridations nous avons obtenu aussi des formes de courge fourragère remplies par le placentas, semblable à la fig. 3.

*Les semences* se trouvent en grand ou en petit nombre, à tégument scléreux ou sans tégument, mais toujours bien conformées.

Grâce à l'action des facteurs nous avons obtenu aussi des formes avec les téguments crevassés, indifféremment s'ils sont scléreux on non. La crevasse des téguments peut être si prononcée que les cotylédons poussent en dehors, fig. 1 et 2. Mais de pareilles semences sont tout-à-fait

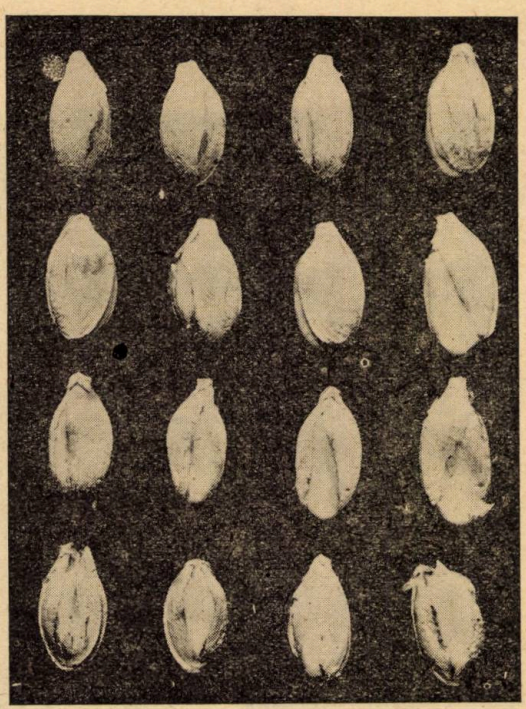

*Fig. 1.*

Semences sans tégument scléreux, de quatre races de courges fourragères – C. Pepo.

délicates, car elles pourrissent aisément dans la terre, ou produisent des plantes moins actives, débiles, improductives.

La couleur verte que présente la semence de courge de Dalmatie est dominante sur la couleur blanchâtre de semence de courge de Ialomitza.

*La fleur.* Les courges sont des plantes allogames, monoïques; il n'y a pas chez nous des courges aux fleurs hermaphrodites ou dioïques.

A la suite des hybridations nous avons produit des plantes de

courge fourragère dioïques. Les séries 496, 495, 469 de 1938 sont des plantes seulement mâles, sans aucune fleur femelle; la série I 52—42 est une plante purement femelle sans aucune fleur mâle.

Le pédicelle floral des fleurs mâles est, en règle générale, assez long=15,7 cm. Les plantes monoïques mâles ont ce pédicelle très court, d'une longueur qui varie de 5,1 cm., 3,5 cm., 2 cm. et même 1,8 cm., décroissant progréssivement du bas de la tige jusqu'à son sommet, fig. 4.

Chez les courges apparaissent, communément, les fleurs mâles avant les fleurs femelles. Mais il y a des cas dans la nature ou, sans aucune influence, peuvent apparaître de bonne heure les fleurs femelles avant les fleurs mâles. Nous avons observé que ces apparitions ont lieu

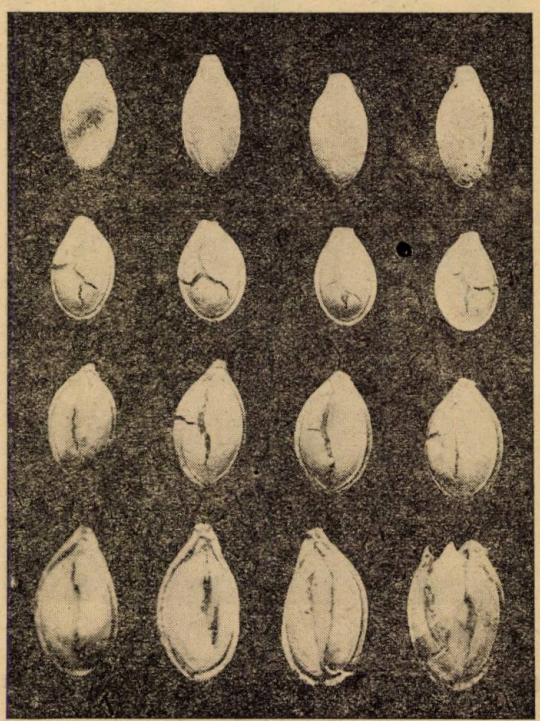

*Fig. 2.*

Semences à tégument crevassé, de quatre races de courges fourragères-C. Pepo ; la même chose se rencontre chez les courges hybrides de C. maxima.

surtout dans un terrain bien fumé ou parmi les hybrides. De ces observations nous tirons la conclusion que les courges, qui sont des plantes allogames, quand elles produisent, dans la nature libre, les fleurs femelles avant les fleurs mâles, sont aussi des hybrides=dans la vraie accepti on

du mot. Chez les hybrides on rencontre plus aisément les cas de parthénocarpie.

*La précocité.* Tous les descendants hybrides que nous avons poursuivis sont précoces, dans le sens que pendant l'automne on récolte plusieurs fruits bien mûris.

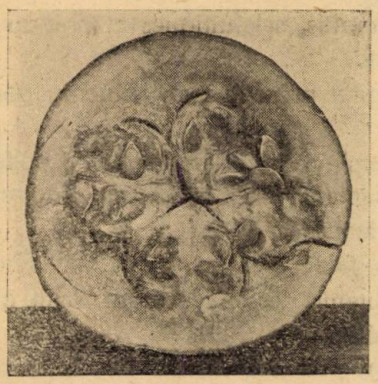

*Fig. 3.*
Fruit de courge comestible-C. maxima à moelle-pareille au courgette.

*Fig. 4.*
Le pédicelle floral, des fleurs mâles, des courges fourragères hybrides est de diverses longueurs.

*La productivité* des descendants hybrides de Cucurbita Pepo est moindre que celle des parents, surtout que celle de la courge fourragère.

La courge de Dalmatie et ses descendants hybrides sont plus productifs que la courge la Ialomitza et ses descendants hybrides.

Les résultats obtenus jusqu'à présent nous ont ouvert la voie de la production de courgettes au grand fruit cylindrique, avec la cavité des loges pleine à moelle, et à semences sans tégument scléreux.

De pareilles courgettes peuvent être utilisées comme légume, dans leurs jeunesse, et aussi comme fourrage, à la maturité.

Ayant la cavité pleine, à moelle, la courgette produit une plus grande quantité de fourrage à l'hectare que les courges communes, à fruits creusés.

A raison de la tige herbacée très courte, non coureuse, on peut cultiver plus de pieds à hectare.

Ayant la semence sans tégument scléreux, la quantité d'huile

MŰEGYETEM

augmente proportionnellement chez les courges à tégument scléreux. Les analyses nous montrent un pourcentage de 43,4 jusqu'à 48,60% d'huile chez les semences sans tégument et seulement 38,77% chez les semences à tégument scléreux.

## 2. Hybridations entre les espèces de courges Cucurbita Pepo x Cacurbita maxima

Nos efforts, depuis plus de vingt années, sont dirrigés vers la production d'une courge Cucurbita maxima avec les semences sans tégument scléreux. Nous avons tous les motifs, scientifiques et pratiques, pour espérer en produire une telle sorte.

Mais nous n'avons pas réussi jusqu'à présent à en obtenir, pour les raison suivantes:

les fleurs de Cucurbita maxima ne s'hybrident pas avec le pollen de Cucurbita Pepo fourragère, et inversement; c'est ainsi que trouvent tous les laboratoires et champs d'expériences;

les courges étant des plantes allogames, il est très difficile de consanguiniser chaque plante, afin d'obtenir de chacune un fruit qui représentera sa propre constitution génétique;

et les consanguinités très rarement peuvent donner de bons résultats chez les courges;

les courges ont besoin de trop grandes superficies et trop espacées, et un personnel nombreaux pour qu'on puisse poursuivre au moins quelques formations de $F_1$ dans la deuxième génération, $F_2$.

Et pourtant, malgré les difficultés naturelles, nous avons continué d'hybrider ces deux espèces de courges, essayant toutes les formations de géniteurs, jusqu'à ce que nous ayons obtenu des descendances de Cucurbita maxima avec le tégument du fruit épais, presque ligneux fig. 5; des fruits avec le tégument de la semence presque absent, fig. 7; des fruits avec la cavité pleine, comme chez la courgette fig. 3; avec la tige herbacée très courte.

D'où proviennent donc de telles sortes de Cucurbita maxima quand elles ne s'hybrident pas avec les Cucurbita Pepo? Sans doute qu'a eu lieu une hybridation.

Pour rêussir nous avons créé des géniteurs nouveaux, en hybridant des variétés Pepo-fourragère x comestible ; leurs descendance $F_1$ et même $F_2$, qui n'ont pas le génome bien fixé, se prêtent à féconder la courge maxima. Il est vrai que par cette voie même la fécondation entre les deux espèces est assez rare, mais une fécondation a lieu, et les formations que nous avons notées la prouve.

1. *Cucurbita Pepo x Cucurbita maxima*

*Hybrides primaires*

| a. *Cucurbita Pepo* | x | *Cucurbita maxima* |
|---|---|---|
| fourragère | | comestible |
| semence à tégument | | semence à tégument |

Dans la première décade d'années, nous avons fait un très grand nombre d'hybridations entre C. Pepo et C. maxima, ayant comme mère soit la courge fourragère, soit la courgette.

Un grand nombre de fleurs n'ont pas fécondé, et d'autres qui ont fécondé ont produit seulement une ou deux semences.

De pareilles semences ont donné toujours des plantes mères qui, bien de fois, ont été stériles ou en majorité stériles.

Cela nous prouve que le développement du fruit a résulté d'une parthénocarpie ou d'apogamie.

| b. *Cucurbita Pepo* | x | *Cucurbita maxima* |
|---|---|---|
| courgette | | comestible |
| semence sans tégument scléreux | | semence à tégument scléreux |
| 117—39 | | 95—39 |

La courgette 117-39 est la descendance de l'hybride $F_1$ 3-37, et la C. maxima 95—39 est la descendance de l'hybride 4—33.

I 99—40. Cette hybridation a donné des fruits de courgette, de couleur jaune foncée, avec peu de semences sans tégument scléreux, germinables.

*Hybrides dérivés*

| a. *Cucurbita Pepo* | x | *Cucurbita maxima* |
|---|---|---|
| fourragère | | comestible |
| semence sans tégument | | semence à tégument |
| $F_1$ | | 22 b—38 |

La mère est la génération première de l'hybridation ($F_1$ 3—37 x C. Pepo Dalmatie) ; le père est la descendance de $F_2$ de l'hybride 4 - 33.

La première génération est une courge fourragère, de couleur jaune, sphérique, avec les semences à tégument scléreux, blanchâtre, germinables ; le fruit plein à moelle. Le tégument des semences est crevassé et plus mince que d'habitude.

Dans toutes ces hybridations les descendances ont été pareilles à la mère ; elles n'ont pas montré avoir emprunté quelque peu de chez C. maxima.

2. *Cucurbita maxima* x *Cucurbita Pepo*

On observe des faits semblables dans le cas du changement des parents mêmes. La fécondation est extrêmement rare, quand on obtient à peine une ou deux semences fertiles; elles ont lieu plus aisément seulement quand au moins l'un des parents est hybride, ou provient d'un hybride dont le génome n'est pas bien fixé.

*Hybrides primaires*

| *Cucurbita maxima* | x | *Cucurbita Pepo* |
|---|---|---|
| comestible | | fourragère |
| semence à tégument | | semence sans tégment |
| 22 b - 38 | | 495 - 38 |

141 - 40. La première génération est une courge maxima, de grandes dimensions, d'une couleur cendrée-rosée, avec deux semences jaunes à tégument scléreux, fertiles.

I 170 - 39. Les parents sont les mêmes.

De cette expérience a résulté un fruit de courge maxima, grand rond, cendré; la cavité des loges bien remplie par le tissu des placentas, fig. 3; les semences jaunes, bien développées mais stériles; seulement deux semences ont été fertiles.

En $F_1$ les plantes sont fertiles, pareilles à la mère; une avec la semence intermédiaire, d'après la forme; l'autre avec la semence jaune avec le bord de la soudure marginale blanche.

I 174 - 39. Les mêmes parents.

Le fruit maxima est tout-à-fait plein à l'intérieur; les semences jaunes, au bord de la soudure blanche, dont seulement deux fertiles

$F_1$ est complètement stérile; le fruit s'est développé par voie parthénocarpique. L'épicarpe du fruit présente une grosseur de 6 - 8 m. m. et n'a pas pu être taillé qu'avec la scie, fig. 5. Cette grosseur de l'épicarpe est le résultat de l'action de facteurs cumulatifs.

I 172 - 39. Les mêmes parents.

Il en est résulté un fruit de C. maxima, rond, plein à l'intérieur; les semences sont grandes, jaunes, avec bordure blanche, dont 128 sont fertiles et 213 stériles.

$F_1$, 5 - 40, a produit des plantes de maxima, aux fruits petits, à moelle, aux semences blanches; les uns à tégument scléreux, d'autres presque sans tégument, pouvant être classés en trois catégories:

129 avec tégument, 9 ayant de tégument sur le moyenne de la semence, 48 presque sans tégument, fig. 7.

D'après la grandeur, les semences peuvent être classées encore en trois catégories : 48 petites, 89 moyennes, 159 grandes.

Au point de vue génétique il semble que sont en action beaucoup de facteurs cumulatifs, pour la formation des différentes catégories de semences, mais entravés dans leurs actions par des facteurs inhibiteurs.

I 201 - 40. *C. maxima* Chiş. x *C. Pepo*
495 - 39

Le fruit de maxima rond, cendré, avec les semences blanches, à tégument scléreux.

Dans toutes ces hybridations les parents ont été d'origine hybride - dans le vrai sens du mot :

$F_1$ 3 - 37 = C. Pepo Ialomitza x C. Pepo courgette ;
les séries : 495, 496, 469 sont des descendances de ce hybride ;
la série 22 - 38 est la descendance de l'hybride 4 - 33, entre C. maxima x ($F_1$, C. Pepo x C. Pepo).

Les résultats sont assez différents et nous prouvent que l'hybridation entre ces deux espèces de courges peut être facilitée en employant des idioplasmes malléables, pas encore bien fixées.

Dans ce but il est bien de nous créer, par hybridations adéquates les géniteurs dont nous avons besoin. Par cette voie il a résulté C. maxima 22 - 38, que nous avons noté, qui a la particularité de donner des descendances avec les semences à tégument partiellement non scléreux ; elle donne aussi des fruits à la cavité remplie à moelle, et le péricarpe ligneux.

*Hybrides dérivés.*

On observe les mêmes faits aussi dans le cas d'hybridations dérivées quand l'un des parents est lui même un hybride de première génération.

I 195 - 50. *Cucurbita maxima* Ch. x *Cucurbita Pepo*
comestible courgette

Le père est $F_1$ = C. Pepo Dalmatie x $F_1$ 3 - 37, avec deux sortes de semences sans tégument scléreux : les unes de couleur verdâtre semblable à Dalmatie, les autres blanchâtres comme Ialomitza.

Il s'est développé un fruit de courge maxima, grand, rond, blanc, avec les semences grandes, blanches, à tégument scléreux : 125 fertiles et 216 stériles.

I 196 - 40. Les mêmes parents.

Fruit de courge maxima, grand, rond, blanc-grisâtre, à cavité

creusée, avec des semences grandes, jaunes, à tégument scléreux, dont une seule est fertile.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I 114 - 40. | *Cucurbita maxima* comestibile 169 - 39 | x | *Cucurbita Pepo* courgette 127-39 |

La mère est C. maxima 22 - 38, noté plus haut, strictement consanguinisé ; le père est le même, noté à I 195 - 40.

Nous avons obtenu le fruit de C. maxima, rond, avec les semences blanches, à tégument scléreux, toutes fertiles.

83 - 40. Les mêmes parents.

Fruit de C. maxima, petit, avec des semences jaunes, à tégument scléreux, parmi lesquelles dix sont fertiles.

I 138 - 40. D'autres séries : 22 - 38 x 38 - 39, mais descendantes des mêmes parents, nous a donné fruit de C. maxima, grand, cendré, avec trois semences blanches, à tégument scléreux, fertiles.

I 208 - 40, une autre plante de la même série, nous a donné fruit de maxima avec les plus petites semences que nous avons obtenus, jaunes, à tégument scléreux, dont seulement deux fertiles.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I 151 - 40. | *Cucurbita maxima* comestibile $F_1$ 172 - 40 semences à tégument | x | *Cucurbita Pepo* courgette 496 - 38 semences sans tégument |

La mère est $F_1$ = C. maxima 22 - 38 x C. Pepo 495 - 38 ;

L'expérience est donc presque un rétrocroisement, car 495 - 38 a la même origine que 496 = C, Pepo fourragère x C. Pepo courgette.

A donné fruit de C. maxima avec des semences petites, jaunes, à tégument scléreux ; dix sont fertiles.

Poursuivant en $F_2$ cette descendance, la série 32 - 41, nous avons obtenu C. maxima aux semences trop petites, jaunes, avec tégument non scléreux sur de grandes surfaces.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I 121 - 40. | *Cucurbita maxima* I 172 - 39 | x | *Cucurbita Pepo* 495 - 38 |

La mère est $F_1$ = C. maxima 22 - 38 ; donc l'expérience est une retrocroisement.

Nous avons obtenu, d'un fruit de maxima, seulement une semence à tégument scléreux.

*Hybrides combinés.*

Les résultats que nous avons présenté, nous montrent que par le changement du génome nous pouvons faciliter l'hybridation entre les deux espèces de courges : maxima et Pepo. Les hybridations dérivées nous donnent le pouvoir d'obtenir des semences fertiles.

Ces observations suscitent de nouvelles recherches, avec des génomes plus complexes et mobiles.

5 - 41. *Cucurbita maxima* x *Cucurbita Pepo*
I 195 - 40 I 151 - 40

La mère est $F_1$ = C. maxima Ch. x 127 - 39 ( = C. Pepo Dalmatie x $F_1$ 3 - 37 (= C. Pepo fourragère x C. Pepo courgette).

Le père est $F_1$ = C. maxima 22 - 38 x C. Pepo 495 - 38 (= C. Pepo fourragère x C. Pepo courgette).

Nous avons obtenu des fruits de C. maxima de petites dimensions, aux semences petites, viables, avec le tégument scléreux, mince, ou sans tégumént scléreux sur une portion quelconque ; on rencontre aussi des semences avec les cotylédons sortis en dehors du tégument, fig. 7 ; un petit nombre de semences a été stérile.

15 - 41. Les mêmes parents.

Ils ont produit le fruit de C. maxima avec des semences fertiles, à tégument scléreux.

17 - 41 = I 114 b - 40. *Cucurbita maxima x Cucurbita Pepo*
I 169 - 39 I 127 - 59

La mère est $F_1$ = C. maxima 22 - 38 consanguinisée x C. Pepo 127 - 39 (=C. Pepo Dalmatie x $F_1$ 3 - 37).

Le père est $F_1$ = C. maxima 151 - 40 (=maxima 22 - 40 x Pepo 495 - 38) x C. Pepo 496-38 (= C. Pepo fourragère x C. Pepo courgette),

A donné le fruit de C. maxima avec deux sortes de semences petites, jaunes, fertiles ; les unes à tégument scléreux, les autres presque sans tégument scléreux.

Ce produit est intéressant par le fait que les semences à tégument scléreux sont dans des loges séparées, des autres à tégument non scléreux.

Dans tous ces trois cas, le père est le même - C. Pepo de la première génération, sortie d'une hybridation dérivée ; dans les premier deux cas la mère est aussi la même - C. maxima, provenue d'une hybridation dérivée ; et cependant les résultats sont différents.

La construction des semences, que nous poursuivons, est différents dans tous ces trois cas, ce qui nous fait savoir que par voie d'hybri-

dations dérivées et combinées nous pouvons plus aisément obtenir de nouvelles formations. De nouvelles formations en génome portent de nouvelles constellations de facteurs.

*Réalisations et conclusions*

En considérant les hybridations de courges dans leur généralité, à la suite de nos efforts poursuivis jusqu'à présent, nous pouvons dégager quelques observations, relatives aux réalisations obtenues sur les courges maxima, à savoir :

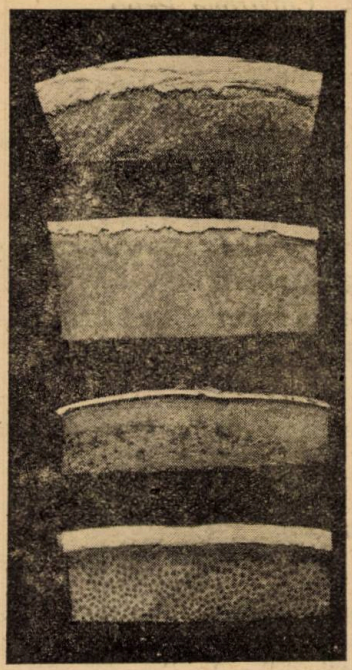

*Fig. 5.*

En parcourant de bas en haut on voit : fruit de C. Pepo à tégument épais-ligneux, à chair fibreuse-ponctuée ; fruit de C. maxima à tégument très mince, à chair compacte ; le reste, des fruits de C. maxima à tégument de plus en plus épais-ligneux.

*La tige.* Aussi que C. Pepo, la courge maxima a une tige herbacée longue, de 3-4 m.. Nous avons obtenu des plantes à tige courte de 1,50.

*Le fruit* de courges maxima est en général grand, de 7-8 kilo ; nous avons obtenu des fruits assez petits qu'on peut considérés comme le résultat d'une transgression.

La coloration du fruit est blanchâtre, mais on peut obtenir, par hybridation, des colorations uniformes rougeâtres, ou tâchetées de rouge sous l'influence de C. Pepo.

La couleur blanchâtre de C. maxima est dominante sur les couleurs rougeâtres ou verdâtres de la courge Pepo.

Les courges ont en général 3 à 7 carpelles ; nous avons obtenu des fruits ayant deux carpelles-donc une transgression, fig. 6.

Le fruit de courges est creusé à l'intérieur ; à la suite des hybridations on obtient de fruits pleins - à moelle, fig. 3, caractère hérité de C. Pepo - courgette.

Le fruit de C. maxima est enveloppé dans un tégument très mince ; à la suite des hybridations on obtient de fruits à tégument-l'épicarpe-très épais, lignifié, d'une grosseur variant de 1 mm. à 6 et même à 8 cm. - caractère hérité transgressivement de C. Pepo, fig. 5.

La chair du fruit, le mésocarpe, de courge maxima est compacte, d'une structure uniforme ; par hybridations nous avons obtenu de fruits avec le mésocarpe fibreux-caractère hérité de C. Pepo ; on rencontre aussi des fruits dans lesquels la chair est si fibreuse qu'elle devient une sorte de feutre-caractère transgressif.

Rarement on rencontre une couche verte, chlorophyllienne, sous l'épicarpe et même sous le mésocarpe, couche rencontrée souvent aussi chez les hybrides de C. Pepo x C. Pepo.

*Fig. 6.*
Fruit de C. maxima à deux carpelles.

*La semence* de courges maxima est d'habitude grande, plate, blanchâtre ou jaunâtre.

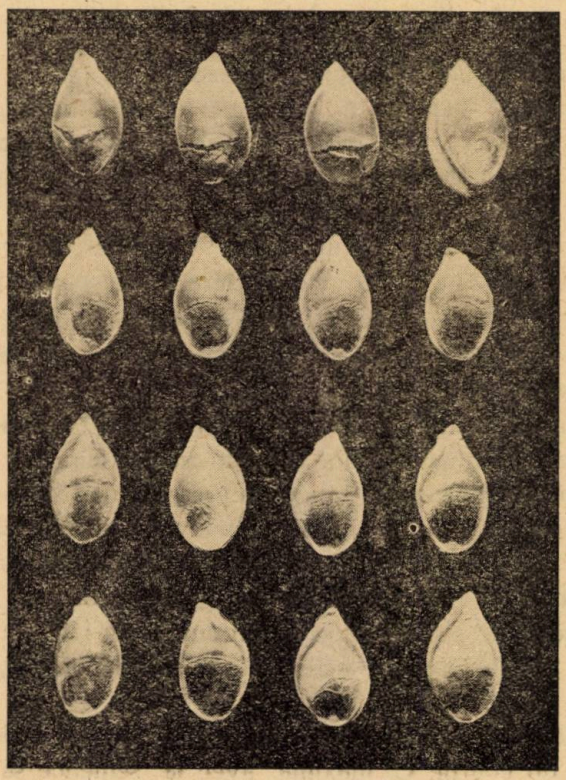

*Fig. 7.* Semences de C. maxima à tégument disparu par degrés.

Nous avons obtenu des semences de différentes grandeurs, quel-

quefois assez petites, et on peut considérer ce caractère comme une transgression ;

de couleur brune foncée ;

à tégument trés épais ou très mince ;

à tégument crevassé, semblable à la fig. 2, ou en grande partie sans tégument, fig. 7.

## Conclusions générales

Cette grande variabilité de caractères, excepté celles connues chez l'espèce de courge C. maxima, nous mènent à la conclusion générale qu'une hybridation entre C. maxima et C. Pepo est possible, si nous avons des géniteurs adéquats à ce problème.

Comme dans la nature nous ne trouvons pas de pareils géniteurs nous pouvons les créer nous-mêmes, en utilisant des hybrides de courges C. Pepo dans la première génération et aussi leurs descendants dont le génome n'est pas bien fixé. C'est par cette voie que nous avons obtenu les résultats mentionnés.

Au point de vue génétique nous avons pu établir peu de faits. La descendance 10 – 41, de $F_1$ 4 – 33, nous a donné de bonnes indications. Ainsi nous avons obtenu d'un fruit : 133 semences en grande partie sans tégument scléreux et 42 à tégument scléreux – donc un rapport de 3 : 1 ;

d'une autre plante (un seul fruit) : 99 semences presque sans tégument scléreux et 34 avec tégument scléreux ; aussi un rapport de 3 : 1.

Mais d'une troisième plante nous avons obtenu : 131 semences presque sans tégument scléreux : 71 d'un caractère intermédiaire : 138 à tégument scléreux.

Les deux premières plantes nous prouvent l'existence d'un facteur mendelien dominant, dont l'action est de faire la semence sans tégument ; la troisième nous indique la présence des facteurs accouplés. C'est pour cette raison que nous ne pouvons obtenir de courge C. maxima avec la semence entièrement privée de tégument scléreux.

En dehors de ces observations, il faut mentioner que la façon dont le manque de sclérification se produit nous fait entendre qu'il y a beaucoup de facteurs en action dans ce phénomène, des facteurs cumulatifs.

Une réelle interprétation de faits peut avoir lieu seulement d'après la création du courge C. maxima avec la semence sans tégument. Ainsi telle que se présente la situation il s'agit de facteurs : mendeliens, cumulatifs, inhibiteurs, accouplés.

Mais rien ne se présente d'un caractère net dans les réalisations obtenues jusqu'à présent, en ce qui concerne la semence.

Une réalisation de courge C. maxima avec la semence sans tégument scléreux, complétement héréditaire, pourrait s'obtenir par voie de tetraploidie. La tâche n'est pas impossible, mais on doit avoir, ou bien produire des géniteurs plus variés et avoir un assortiment plus riche que le nôtre.

*Station d'amélioration des plantes*
*Jassy*

*(Reçu le 22 Novembre 1946).*

## Bibliographie

1. Benning Hans – *Der Kürbis mit schalenlosen Samen*, Landwirtschaftliche Blâter für Siebenbürgen; 47, 1935.
2. „ – *Die Kultur des Kürbisses mit schalenlosen Samen*, idem; 4, 1936.
3. Berkner F. – *Die schalenlosen Kürbis*, Der Züchter, 1940.
4. Durham – *Has parthenogenesis been confused with hermaphroditen in the Cucurbita*, Zeitschrift für Induktive Abstammungs und Vererbungslehre; 37, 1925.
5. Friedsam Hermann – *Der Kürbis mit schalenlosen Samen*, Landwirtschaftliche Blätter für Siebenbürgen, 14, 1937.
6. Graef Karl – *Der Kürbis mit schalenlosen Samen*, Landwirtschaftliche Blätter für Siebenbürgen; 17, 1937.
7. Haagedoorn – *Parthenogenèsis in Cucurbita*, Zeitschrift für Induktive Abstammungs und Vererbungslehre, XXXIV, 1924.
8. Pangalo I. K. – *An attempt of studying pumpkins as oil plants*, Bulletin of applied botany, of genetics and plant-breeding, Leningrad, XXIII, 1929 – 1930.
9. Popesco St. – *Sur l'amélioration des courges*, Bulletin de l'Institut de recherches agricoles de Roumanie, 1938.
10. Rosen F. – *Über die Samen einiger Speisekürbisse*, Beiträge zur Biologie der Pflanzen, 14, 1920 – 1929.
11. Scheleketa P. Y. – *The pumpkin in Ukraine*, Bulletin of applied botany, of genetics and plant-breeding. Leningrad, XXIII, 1929 – 1930.
12. Sofronov E. M. – *To the biology of pollination and fertilization of Cucurbita pepo L.*, Bulletin of applied botany, of genetics and plant-breeding, Leningrad, XXIII, 1929 – 1930.
13. Tschermak-Seysseneg Erich – *Der Kurbis mit schalenlosen Samen*, Wiener Landwirtschaftliche Zeitung; 7, 1934.
14. „ Idem, idem, 8, 1934.

# CONTRIBUTION À LA CONNAISSANCE DES MICROMYCÈTES DE MOLDAVIE

par

C. SANDU-VILLE

La présente note contient un nombre de 60 espèces de Micromycètes recoltés par nous au cours d'excursions faites en Moldavie pendant l'année 1945 et aussi pendant l'année 1946.

A cause de la situation difficile déterminée par la dernière guerre comme aussi à cause de la sécheresse qui a dominé deux années consécutives le territoire de Moldavie nos excursions faites en différentes contrées n'ont pas été si riches qu'autrefois en découverts mycologiques.

Dans la présente note sont compris de nombreuses espèces qui ont été déjà indiquées dans notre pays dans d'autres contrées et par différents auteurs. Mais nous indiquons ici aussi d'autres espèces qui sont pour la première fois citées dans la flore mycologique de Roumanie. En citant ces espèces, le présent travail apporte une contribution à la détermination de l'aire géographique des Micromycètes en Roumanie.

1. **Albugo Bliti** (Biv.) O. Kunze in Magnus, Pilzfl. v. Franken, II. 5 (1897); Migula, Kr. Fl. Deutechl. Pilze I, 154 (1910).

**Syn.**: *Uredo Bliti* Biv. Bern., Fl. Sicula, III, 11 (1813).

*Cystopus Bliti* (Biv.) Lév., Ann. Sc. Nat. 3 sér. VIII. 373 (1847); Fischer in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. IV, 422 (1893); Oudem., Enum. Syst. Fung. II, 1059 (1920).

Sur les feuilles de *Amaranthus Blitum* L., à Iaşi, distr. Iaşi, 12. VI, 1946. Conidies: 12-21 x 9-11 $\mu$..

2. **Pernospora Melandryi** Gäum. in Beitr. Monogr. Gatt. Pernospora in Beitr. Kr. Fl. Schweiz, V. 4. 226 (1923).

Sur les feuilles de *Melandryum album* (Mill.) Garke, à Dobrovăţ, distr. Vaslui, 19. VII, 1945; conidiophores: 220-400 x 4-7,5 $\mu$.; conidies: 24-33 x 15-18 $\mu$..

3. **Peronospora variabilis** Gäum., Beitr. Monogr. Gatt. Peronospora in Beitr. Kr. Fl. Schweiz, V. 4. 226 (1923).

**Syn:** *Peronospora effusa* var. *major* Casp., Monatsber. Berl. Akad. 24 (1885).

*Peronospora effusa* (Grev.) Rabenh. in Herb. Myc. I. nr. 1880 (!); Migula, Kr. Fl. Deutsch. Pilze I. 174 (1910); Oudem., Enum. Syst. Fung. II, 1035 (1920).

*Botrytis effusa* Grev., Fl. Edin. 468 (1824).

Sur les feuilles de *Chenopodium album* L., à Suceava, distr. Suceava; 16.VI.1946; conidiophores: 120-300 x 7,5-10 $\mu$.; conidies: 21-27 x 18 $\mu$..

4. **Bremia Lactucae** Reg., Bot. Zeit. 665 (1843); Fischer in Rabenh., Kr. Fl. Deutsch. IV. 440 (1892); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze, I. 126, Tab. II T, fig. 3-4 (1910); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 1098 (1923).

Sur les feuilles de *Arctium Lappa* L., à Rădăuți, distr. Rădăuți, 17.VI.1946; conidiophores jusqu'à 360 x 5-9 $\mu$.; conidies: 15-17,5 $\mu$..

5. **Erysiphe Umbelliferarum** De Bary, Morph. u. Phys. d. Pilze, I, 50 (1870); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. II, 31 (1887); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 216 (1923); Blumer, Die Erysiph. Mitteleuropas in Kr. Fl. Schweiz. VII, 1. 195 (1933).

Sur les feuilles de *Conium maculatum* L., à Iași, distr. Iași 12. VIII.1946; peritheces: 94-126 $\mu$.; asques: 45-57 x 30-36 $\mu$.; spores: 21-24 x 12-15 $\mu$.; conidies: 30-39 x 10-15 $\mu$..

6. **Leveillula taurica** (Lév.) Arnaud, Ann, Epiphyt. VII, 92-94 (1919-20); Săvul. et Sandu, Erysiph. Rumäniens in Ann. Acad. Agron. Buc. I. 98 (1929); Sandu, Erysiph. Rumäniens in Mem. Sec. Sc. Acad. Roum. ser. III. Tom. XI, Mem. 5,57 (1936); Blumer, Beitr. Kr. Fl. Schweiz, VII, 1,403 (1933).

Sur les feuilles de *Salvia pratensis* L., à Iași, dist. Iași, 26.IV. 1945; peritheces: 120-150 $\mu$.; spores: 21-30 x 14-16,5 $\mu$.; conidies: 36-60 x 15-18 $\mu$..

7. **Microsphaera abbreviata** Peck., Rep. Report, 28, Stat. Mus. N. York, 64, Tab. II, fig. 4-5 (1876); Săvul. et Sandu, Erysiph. Rumäniens in Ann. Acad. Agron. Buc. I, 79 (1929); I, 79 (1929); Blumer, Beitr. Kr. Fl. Schweiz. VII.1 329, fig. 129 (1933); Sandu, Erysiph. Rumäniens in Mem. Sect. Sc. Acad. Roum. ser. III, Tom. XI, Mem. 5,24 (1936).

Sur les feuilles de *Quercus Robur* Willd., à Breazu, distr. Iași, 14.VI.1946; conidies: 24-36 x 15-21 $\mu$..

8. **Microsphaera Berberidis** (DC.) Lév., Ann. Sc. Nat. 3 ser. XV, 159 et 383 (1851); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. II, 37 (1887); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III, 3, 1, 76, Tab. XVIII, fig. 6 (1913); Oudem., Enum. Syst. Fung. III, 181 (1921); Săvul et Sandu, Erysiph. Rumăniens in Ann. Acad. Agron. Buc. I. 75 (1929); Blumer Beitr. Kr. Fl. Schweiz, VII 1, 294 (1933); Sandu, Erysiph. Rumäniens in Mem. Sect. Sc. Acad. Roum. ser. III, Tom. XI, Mem. 5,21 (1936).

**Syn.**: *Erysiphe Berberidis* DC., Fl. Fr. II. 275 (1805).

Sur les feuilles de *Berberis vulgaris* L. var. *purpurea*, à Vişan, distr. Iaşi 20.IX.1945; conidies: 26-30 x 18-20 $\mu$..

9. **Phyllactinia suffulta** (Reb.) Sacc., Syll. Fung. I. 5 (1882); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. II. 42 (1887); Migula, Kr. Fl. Deutschl. III, 3. 1, 80, Tab. XXI, fig. 1-2 (1913); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 418 (1923); Blumer, Kr. Fl. Schweiz, VII, 1. 391, fig. 155-161 (1933).

**Syn.**: *Sclerotium suffultum* Reb., Prodr. Fl. Neomarch. 360 (1804).

Sur les feuilles de *Fraxinus excelsior* L., à Iaşi, distr. Iaşi, 19.X. 1945; peritheces avec des asques jeunes et steriles.

10. **Polystigma rubrum** (Pers.) DC, Mem. Mus. III, 337 (1); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. II. 144 (1887); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 2. 718, Tab. CVII, fig. 9, Tab. CVIII, fig. 1-5 et Tab. CXI, fig. 1 (1913); Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 724 (1921).

**Syn.** *Xyloma rubrum* Pers., Obs. Myc. II. 101 (1799).

Sur les feuilles de *Prunus domestica* L. à Vişan, distr. Iaşi, 20. IX, 1945; conidies: 24-30 X 1, 5 $\mu$.

11. **Pleonectria Berolinensis** Sacc., Michelia, I. 123 (1879); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. II. 108 (1887); Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 361 (1921).

**Syn.**: *Pleonectria Ribis* (Niessl) Karst., Symb. Myc. Fenn. VI. 42 (1873-79); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III, 3. 2. 760 (1913).

*Nectria Ribis* Niessl, Vorarbeit. Kr. Fl. II. 114 in Verh. d. naturf. Ver. Brünn (1865).

Sur les rameaux de *Ribis rubrum* L. à Ilişeşti, distr. Suceava, 16.VI.1946 et à Rădăuţi, distr. Rădăuţi, 18.VI.1946; asques: 100-145 X 9-12 $\mu$. spores: 18-24 X 7, 5 $\mu$.

12. **Plowrightia Ribesia** (P.) Sacc., Syll. Fung. II. 635 (1882); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 3 2. 698 (1913); Oudem., Syst. Fung. III. 360 (1921).

**Syn.**: *Sphaeria ribesia* Pers. in Usteri, N. Ann. d. Bot. V. 24 (1).

*Dothidea ribesia* Fr., Syst. Myc. II. 550 (1823); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. II. 910 (1887).

Sur les rameaux de *Ribes rubrum* L., à Ilişeşti, distr. Suceava, 16.VI.1946 et à Rădăuţi, 18.VI.1946; asques: 75-90 X 12-15 $\mu$.; spores 15-21 X 4, 5-6 $\mu$..

13. **Massaria irregularis** (DC.) Weese, Eumycetes selecti exsiccati nr. 338 (!).

**Syn.**: *Sphaeria irregularis* DC., Fl. Fr. VI. 116 (1815).

*Sphaeria profusa* Fr., Syst. Myc. II. 392 (1823).

*Aglaospora profusa* (Fr.) De Not., Microm. ital. decas V. 5, nr. 3 (1839-55); Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 918 (1921).

*Pseudovalsa profusa* (Fr.) Winter in Rabenh,, Kr. Fl. Deutschl. II. 785 (1887).

*Pseudovalsa irregularis* (DC.) Schroet., Kr. Fl. Schles. II, 145 (1897); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III, 3. 1. 625 (1913).

Sur les rameaux de *Robinia pseudoacacia* L., à Breazu, distr. Iaşi, 14.VI.1946; asques: 175-210 X 15-18 $\mu$; spores 45-56 X 12-15 $\mu$.

14. **Valsa salicina** (Pers.) Fr., Summa veg. Scand. 412 (1849): Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. II. 728 (1887); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 3. 1. 543 (1913); Oudem., Enum. Syst. Fung. II. 529 (1920).

**Syn.**: *Sphaeria salicina* Pers., Obs. I. 64 (1796).

Sur les rameaux de *Salix alba* L., à Paşcani, distr. Baia, 15.VI.1946; asques: 40-60 X 6-9 $\mu$,; spores: 12-15 X 3 $\mu$.; conodies: 5-6 X 1, 5 $\mu$.

15 **Valsa leucostoma** (Pers.) Fr., Summa veg. Scand. 411 (1849); Migula, Kr. Fl. Deutschl, Pilze III, 3. 1, 522, Tab. LIV, fig. 5-9 (1913); Oudem., Enum. Syst. Fung. III, 698 (1921).

**Syn.**: *Sphaeria leucostoma* Pers., Usteri in Ann. d. Bot. II fasc. V. 23 (!).

*Valsa Persoonii* Nitschke, Pyrenom. Germ. 222 (1867).

Sur les rameaux de *Prunus armeniaca* L., à Iaşi, distr. Iaşi, 20. IX.1945; asques: 45-60 X 7-10 $\mu$.; spores: 9-12 X 3 $\mu$..

16. **Valsaria insitiva** Ces. et De Not., Schema Sphaer. 31 (1863); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. II. 804 (1887): Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III, 31, 655 (1913); Oudem., Enum. Syst. Fung. II, 723 (1920).

Sur les rameux de *Quercus* sp., à Breazu, distr. Iaşi, 14.VI.1946; asques: 90-108 X 9-12 $\mu$.; spores: 15-18 X 7, 5-9 $\mu$..

17. **Fenestella vestita** (Fr.) Sacc., Michelia I, 575 (1849); Winter in Rabeh., Kr. Fl. Deutschl. II, 793 (1887); Migula, Kr. Fl. Deutschl,

Pilze III, 3. 1. 607 (1913); Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 360 (1921).

**Syn.**: *Sphaeria vestita* Fr., Syst. Myc. II. 410 (1823).

Sur les rameaux de *Ribes rubrum* L., à Ilişeşti, distr. Suceava, 16.VI.1946; asques: 146-180 X 15-28 $\mu$.; spores: 18-26 X 9-12 $\mu$..

18. **Diatrypella pulvinata** Nitschke, Pyrenom. Germ. 72 (1867); Winter in Rabeh., Kr. Fl. Deutschl. II. 829 (1887); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 3. 1. 645 (1913); Oudem., Enum. Syst. Fung. II. 716 (1920).

Sur les rameaux de *Quercus Robur* Willd., à Zorleni, distr. Tutova, 13.V.1946; asques: 56-80 X 9-12 $\mu$.; spores: 6 X 1,5 $\mu$..

19. **Ustilago longissima** (Sow.) Tul., Ann. Sc. Nat. 3 ser. VII, 76 (1847); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. I. 85 (1884); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III, 1. 249 (1910); Lindau in Kr. Fl. Mark. Brandenb. V a. 22 (1914); Oudem., Enum. Syst. Fung, I. 866 (1919).

**Syn.**: *Uredo longissima* Sow., Engl. Fungi, Tab. 139 (1799).

Sur les feuilles de *Glyceria spectabilis* M. et K., à Paşcani, distr. Baia, 18.VI, 1946; chlamidospores: 4-6 X 3-4,5 $\mu$..

20. **Uromyces Scirpi** (Cast.) Burr., Paras. fung. Illinois in Bull. Illinois State labor. of Nat. Hist. Peoria, II, 168 (1885); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III, 1 310 (1910); Klebahn in Kr. Fl. Mark Brandenb. V a. 284 (1914); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 294 (1923).

**Syn.**: *Uredo Scirpi* Cast., Cat. Fl. de Mars. 214 (1845).

Sur les feuilles de *Oenanthe aquatica* Lam., à Pascani, distr. Baia, 18.VI.1956; aecidiospores: 18-22, 5 X 15-18 $\mu$..

Sur les feuilles de *Bolboschaenus maritimus* (L.) Pall., à Paşcani, distr. Baia, 18.VI.1946; uredospores: 21-24 X 15-18 $\mu$.; teleutospores: 24-36 X 15-21 $\mu$..

21. **Uromyces appendiculatus** (Pers.) Lév., Ann. Sc. Nat. 3 ser. VIII, 371 (!); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III, 1. 296 (1910).

**Syn.**: *Uredo appendiculata* var. *Phaseoli* Pers., Obs. in Usteri, Ann. Bot. XV, 17 (1796).

*Uromyces Phaseoli* (Pers.) Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. I. 157 (1886).

Sur les feuilles de *Phaseolus vulgaris* L., à Vişan, distr. Iaşi, 20. IX.1945; teleutospores; 26-30 X 18-24 $\mu$..

22. **Uromyces Thapsi** (Opiz) Bubak in Houby Ceske Dil. I. Ured (1906); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III, 1. 288 (1910); Oudem. Enum Syst. Fung. IV. 661 (1923); Săvul. et O. Săvul., Mat. Fl. Ured. Roum. in Mem. Sec. Sc. Acad. Rom. ser. III, Tom XVII, Mem. 4. 103 (1941).

**Syn.**: *Uredo Thapsi* Opiz, Seznam, 153 (1853).

Sur les feuilles de *Verbascum phlomoides* L., à Iaşi, distr. Iaşi, 20.IX.1945. Aecidiospores.

23. **Puccinia Phragmites** (Schum.) Koern. in Hedwigia, XV. 179 (1878); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. I. 179 (1884); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 1. 434 Tab. VIII K. fig. 2 (1910); Klebahn in Kr. Fl. Mark Brandenb. V a. 467 (1914); Oudem., Enum. Syst. Fung. I. 805 (1919); Săvul. et O. Săvul., Mat. Fl. Ured. Roum. in Mem. Sect. Şc. Acad. Roum. ser. III. Tom. XVII, Mem. 4. 23 (1941).

**Syn.**: *Uredo Phragmites* Schum., Enum. Pl. Saell. II. 231 (1803).

Sur les feuilles de *Phragmites communis* Trinn., à Dobrovăţ, distr. Vaslui, 1.IX.1943; teleutospores: 36-51 X 15-21 $\mu$..

24. **Puccinia Cynodontis** Desm., Exsicc. III. nr. 665 (1942); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III, 1. 428 (1910); Săvul et O. Săvul., Mat. Fl. Ured. Roum. in Mem. Secţ. Şc. Acad. Roum. ser. III. Tom. XVII. Mem. 4. 16 (1941).

Sur les feuilles de *Plantago lanceolata* L., à Iaşi, distr. Iaşi, 5. VI.1946. Aecidiospores.

25. **Puccinia Malvacearum** Mont. in Gay, Hist. fis. y polit. de Chile, VIII, 43 (1852); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. I. 168 (1884); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 1. 386, Tab. VII M. fig. 8 (1910); Klebahn in Kr. Fl. Mark Brandenb. V a. 550 (1914); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 48 (1923); Săvul. et O. Săvul., Mat. Fl. Ured. Roum. in Mem. Secţ. Şc. Acad. Roum. ser. III. Tom. XVII, Mem. 4. 42 (1941).

Sur les feuilles de *Malva neglecta* Wallr., à Rădăuţi, distr. Rădăuţi, 18.VI.1946; teleutospores: 36-60 X 12-24 $\mu$..

26. **Puccinia Conii** (Str.) Fuck., Symb. Myc. 53 (1869); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 1. 373 (1910); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 215 (1923); Săvul. et O. Săvul., Mat. Fl. Ured. Roum. in Mem. Secţ. Şc. Acad. Roum. ser. III, Tom. XVII. Mem. 4,48 (1941).

**Syn.**: *Uredo Conii* Strauss, Wtt. Ann. II. 96 (1810).

*Puccinia bullata* Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. I. 191 (1884).

Sur les feuilles de *Conium maculatum* L., à Dobrovăţ, distr. Vaslui, 19.VII.1945; teleutospores: 26-46 X 21-24 $\mu$..

27. **Puccinia suaveolens** (Pers.) Rostr., Forh. scand. naturf. 338-350 (1874): Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. I. 189 (1884); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III, 1. 334, Tab. VII F. fig. 8 (1910); Klebahn in Kr. Fl. Mark Brandenb. V a. 404 (1914); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV, 1076 (1923); Săvul. et O. Săvul., Mat. Fl. Ured. Roum. in

Mem. Secț. Șc. Acad. Roum. ser. III. Tom. XVII, Mem. 4. 75 (1941).

**Syn.:** *Uredo suaveolens* Pers., Obser. II. 24 (1799).

Sur les feuilles de *Cirsium arvense* Scop., à Suceava, distr. Suceava, 16 VI.1946; 18-26 X 18-24 $\mu$.

28. **Puccinia Taraxaci** (Reb.) Plow., Brit. Ured. 186 (1804); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 1. 350, Tab. VII E, fig. 8 (1910); Klebahn in Kr. Fl. Mark, Brandenb. V a 427 (1914); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 1171 (1923); Săvul. et O. Săvul., Mat. Fl. Ured. Roum. in Mem. Secț. Șc. Acad. Roum. ser. III. XVII, Mem. 4, 75 (1941).

**Syn.:** *Puccinia Phaseoli* var. *Taraxaci* Rebent., Fl. Neom. 356 (1804).

Sur les feuilles de *Taraxacum officinale* Web., à Ilișești, distr. Suceava, 16.VI.1946; teleutospores: 17, 5-24 X 15-21 $\mu$.; à Rădăuți, distr. Rădăuți, 18.VI 1946; teleutospores: 21-24 X 18-24 $\mu$..

29. **Puccinia Helianthi** Schw., Syn. Fung. Carp. 73 (1822); Migula, Kr. Fl Deutschl. Pilze III. 1. 341, Tab. VII B. fig. 3 (1910); Klebahn in Kr. Fl. Mark Brandenb. V a. 438 (1914); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 994 (1923); Săvul. et O. Săvul., Mat. Fl. Ured. Roum. in Mem. Secț. Șc. Acad. Roum. ser. III. Tom. XVII, Mem 4. 70 (1941).

Sur les feuilles de *Helianthus annuus* L., à Iași, distr. Iași, 12, VIII, 1946; uredospores: 24-27 X 18-21 $\mu$. Sur les cotiledones de *Helianthus annuus* L. à Zorleni, distr. Tutova, 13.V.1946; aecidiospores: 24-36 X 15-21 $\mu$..

30. **Puccinia Absinthii** DC. in Encycl. VIII, 245 (1808); Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. I. 209 (1884); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 1. 328, Tab. VII, fig. 3 (1910); Klebahn, Kr. Fl. Mark Brandenb. V a. 435 (1914); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 969 (1923); Săvul. et O. Săvul., Mat. Fl. Ured. Roum. in Mem. Secț. Șc. Acad. Roum. ser. III. Tom. XVII, Mem. 4. 61 (1941).

Sur les feuilles de *Artemisia Absinthium* L. à Iași, distr. Iași, 20.IX.1945; uredospores: 18-30 X 15-21 $\mu$..

31 **Puccinia Bardanae** Corda, Ic. Fung. IV. 17 (1840); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III.1.345, Tab. VII. fig. 7 (1910); Klebahn in Kr. Fl. Mark Brandenb. V a. 410 (1914); Săvul. et O. Săvul. in Mem. Sect. Sc. Acad. Roum. ser. III. Tom XVII. Mem. 4,63 (1941).

**Syn.:** *Puccinia floscuculorum* (Alb. et Schw.) Winter in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. I, 206 (1848) p. p..

32, **Puccinia Cichorii** (DC.) Bell. in Kickx, Fl. Flandr. II. 65 (1867); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III.1.333, Tab. VII C. fig. 4 (1910); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 112 (1923); Săvul. et O.

Săvul., Vol. Mat. Fl. Ured. Roum. in Mem. Sect. Sc. Acad. Roum. ser. III. Tom. XVII, Mem. 4. 66 (1941).

**Syn.** : *Aecidium Cichoracearum* DC., Fl. Frank. II. 239 (1815).

Sur les feuilles de *Cichorium Inthybus* L., à Dobrovăţ, distr. Vaslui, 19.VII.1945 ; uredospores : 23-29 x 18-20 $\mu$..

33. **Phragmidium disciflorum** (Tode) James, Contr. U. S. Nat. Herb. III. 276 (1898) ; Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 662 (1923) ; Săvul. et O. Săvul., Mat. Fl. Ured. Roum. in Mem. Sect. Sc. Acad. Roum. ser. III. Tom. XVII, Mem. 4. 106 (1941).

**Syn.** : *Phragmidium subcorticium* (Schrank) Winter in Rabenh.; Kr. Dl. Deutschl. Pilze III, 1. 449, Tab. IX D. fig. 3 et Tab. IX E. fig. 2 (1910) ; Klebahn in Kr. Fl. Mark Brandenb. ,V a. 680 (1914).

*Lycoperdon subcorticium* Schrank in Hoppe's bot. Taschenb. 68 (1793).

Sur les feuilles de *Rosa canina* L., à Iaşi, distr. Iaşi, 15.IX.1945 ; telèutospores : 60-112 x 30-42 $\mu$. avec 6-12 cellules.

34. **Phyllosticta cruenta** (Fr.) Kickx, Fl. crypt. Flandr. I. 412 (1867) ; Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VI. 161 (1901) ; Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb IX. 79 (1915) ; Oudem., Enum. Syst. Fung. I. 1178 (1919) ; Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze, III. 4. 1. 60. Tab. I. fig. 1-3 et tab. IV. fig. 1 (1921).

**Syn.** : *Sphaeria cruenta* Fr., Syst. Myc. II. 581 (1823).

Sur les feuilles de *Polygonatum officinale* All., à Breazu, distr. Iaşi, 14.VI.1945 ; spores : 15-18 x 5-7 $\mu$..

35. **Phoma Urticae** Schulz et Sacc., Syll. Fung. III. 140 (1884) ; Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VI 226 (1901) ; Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 182 (1915) ; Oudem., Enum. Syst. Fung. II. 76 (1920) ; Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 107 (1921).

Sur les rameaux de *Urtica dioica* L., à Iaşi, distr. Iaşi, 15.IV. 1946 ; pycnides : 250-360 $\mu$. ; spores : 3,5-5 $\mu$.

36. **Cytospora intermedia** Sacc., Syll. Fung. III. 264 (1884) ; Allesch. in Rabenh., Fl. Deutschl. VI 595 (1901) ; Oudem., Enum. Syst. Fung. II. 734 (1920) ; Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 205 (1921).

Sur les rameaux de *Quercus* sp., à Breazu, distr. Iaşi, 1.VI.1946 ; conidies : 5-6 x 1 $\mu$..

37. **Cytospora Oxyacanthae** Rabenh. in Bot. Zeitg. 503 (1858) ; Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VI. 579 (1901) ; Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 339 (1915) ; Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 195 (1921) ; Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 421 (1921).

Sur les rameaux de *Crataegus Oxyacantha* L. à Breazu, distr. Iaşi, 14.VI.1946 ; conidies : 4,5-6 x 1-1,5 $\mu$..

38. **Cytospora microspora** (Corda) Rabenh , Deutschl. Crypt 147 (1884) ; Allesch in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VI. 578 (1901); Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 340 (1915) ; Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 194. Tab. XXV, fig. 1-5 (1921) ; Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 421 (1921).

**Syn.** : *Naemaspora microspora* Corda, Ic. fung. III. 26, Tab. IV, fig. 69 (1837-59).

Sur les rameaux de *Crataegus Oxyacantha* L., à Breazu, distr. Iaşi, 14.VI.1946 ; conidies : 5-7,5 x 1-1,4 $\mu$..

39. **Cytospora cincta** Sacc.; Syll. Fung. III. 254 (1884) ; Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VI. 593 (1901) ; Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 204 (1921) ; Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 775 (1921).

Sur les rameaux de *Prunus spinosa* L., à Zorleni, distr. Tutova, 12.V.1945 ; conidiophores : 18-21 x 1,5 $\mu$. ; conidies : 6-9 x 1,5 $\mu$..

40. **Septoria Tritici** Desm., IX Not. 17 (1842) ; Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VI. 870 (1901) ; Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 464 (1915) ; Oudem., Enum. Syst Fung. I. 940 (1919) ; Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4 1. 401 (1921).

Sur les feuilles de *Triticum vulgare* Vill., à Siret, distr. Rădăuţi 18.VI.1946 ; pycnides : 100-165 $\mu$. ; conidies : 40-54 X 3-4, 5 $\mu$..

41. **Septoria piricola** Desm , XVIII Not. 7. 8 (!) ; Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VI. 829 (1901) ; Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 493 (1915) ; Migula, Kr Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 420, Tab. LIV. fig. 3-4 et Tab. LV. fig. 1-3 (1921) ; Oudem.. Enum Syst. Fung. III. 451 (1921).

Sur les feuilles de *Pirus communis* L. à Vişan, distr. Iaşi, 20.IX. 1945 ; pycnides : 132-180 $\mu$. ; conidies : 45-60 X 3 $\mu$ .

42 **Septoria Podagrariae** Fuck , Symb. Myc. 218 (1869) ; Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VI. 724 (1901) ; Diedike in Kr. Fl. Mark. Brandenb. IX. 423 (1915) ; Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III 4. 1. 375, Tab. L. fig. 8-9 et Tab. LI. fig 1 (1921) ; Oudem., Enum. Syst Fung. IV. 223 (1923).

Sur les feuilles de *Aegopodium Podagraria* L., à Rădăuţi, distr. Rădăuţi, 18.VI.1946; pycnides ; 120-160 $\mu$. ; conidies : 60-70 X 3-4, 5 $\mu$..

43. **Septoria Chelidonii** Desm., Ann. Sc. Nat. XVII. 110 (1842) ; Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VI. 756 (1901) ; Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 441 (1915 : Migula. Kr. Fl. Deutschl. Pilze

III. 4. 1 338 (1921); Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 217 (1921).

Sur les feuilles de *Chelidonium majus* L., à Ilişeşti, distr. Suceava, 16.VI.1945; pycnides: 75-100 $\mu$.; conidies: 18-30 x 1,5 $\mu$..

44. **Dothichiza populea** Sacc. et Briard, Syll. Fung. III. 672 (1884); Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VII. 405 (1903); Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 748 (1915); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 509 (1921); Oudem., Enum. Syst. Fung. II. 76 (1920).

Sur les rameaux de *Populus pyramidalis* Rot., à Iaşi, distr. Iaşi, 20.III.1946; conidies: 9-12 x 9-11 $\mu$..

45. **Diplodia Maclurae** Speg. in Michelia I. 484 (1882); Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VII. 135 (1903); Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 620 (1915); Oudem., Enum. Syst. Fung. II. 900 (1920); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 328 (1921).

Sur les rameaux de *Maclura aurantiaca* Nutt, à Iaşi, distr. Iaşi, 5.IV.1946; conidies; 20-24 x 8-9,5 $\mu$..

46. **Diplodia Tiliae** Fuck., Symb. Myc. 394 (1869); Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VII. 167 (1903); Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 603 (1915); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 338 (1921); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 16 (1923).

Sur les rameaux de *Tilia europaea* L., à Zorleni, distr. Tutova, 13.V.1946, conidies: 21-24 9-11 $\mu$.; à Breazu, distr. Iaşi, 14.VI.1946; conidies: 18-24 x 10 $\mu$..

47. **Didymosporina Aceris** (Lib.) v. Höhn., Fragm. z. Mycol. XVIII. Matt. nr. 976 in sitz. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien, Abt. I. Bd. 125, 55 (1916).

**Syn.:** *Cheilaria Aceris* Lib., Exsicc. Ard. nr. 255 (!).

*Marssonia truncatula* Sacc., Michelia I. 203 (1879); Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VII. 595 (1903); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 570. Tab. LXXX. fig. 1-5 (1921); Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 1173 (1921).

Sur. les feuilles de *Acer campestris* L, à Dobrovăţ, distr. Vaslui 19.VII.1945; depôts de spores: 66-130 $\mu$.; conidies; 8-10 x 4-5 $\mu$..

48. **Cylindrosporium Ranunculi** (Bonord.) Sacc., Michelia I. 540 (1882); Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VII. 731 (1903); Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 846 (1915); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 608, Tab. LXXXIX, fig. 7 (1921).

**Syn.:** *Fusidium Ranunculi* Bonord, Handb. 43, Tab. I. fig. 3 (1851).

f.: **scelerati** F. Brun., Act. Soc. Linn. Bordeaux, LXIV. 248 (1890); Oudem., Enum. Syst. Fung. III. 168 (1921).

Sur les feuilles de *Ranunculus sceleratus* L., à Zorleni, distr. Tutova, 13.V.1946; conidies: 51-60 x 2-3 $\mu$..

49. **Colletotrichum gloeosporioides** (Penz) Sacc., Syll. Fung. III. 735 (1884); Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VII. 558 (1903).

**Syn.:** *Vermicularia gloeosporioides* Penz, Fungi Agrum. in Michelia II. 450 (1882).

var. **Hederae** Passer., Diagn. Funghi nuovi, nota IV in Atti R. Acad. Linc. Roma, vol. VI. 469 (1889); Allesch., l. c. Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 818 (1915); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 173 (1923).

Sur les feuilles de *Hedera Helix* L., à Breazu, distr. Iaşi, 14.VI. 1946; depôts de spores: 75-180 $\mu$.; conidies: 18-24 x 4-5 $\mu$..

50. **Stilbospora angustata** Pers., Syn. Fung. 96 (1801); Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VII. 635 (1903); Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX 867 (1915); Oudem., Enum. Syst. Fung. II. 323 (1920); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 582. Tab. LXXXIII. fig. 4-8 (1921).

Sur les rameaux de *Carpinus Betulus* L., à Suceava, distr. Suceava, 16.VI.1946; conidies: 33-42 x 9-13 $\mu$..

51. **Melanconium Desmazierii** (B. et Br.) Sacc., Michelia II. 355 (1882); Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VII. 583 (1903) c. icon.; Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 863 (1915); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III 4. 1. 566. Tab. LXXVIII fig. 5-8 (1921); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 17 (1923).

**Syn.:** *Discella Desmazierii* B. et Br., Ann. Nat. Hist. 2 ser. V. 377 (1836-82).

Sur les rameaux de *Tilia europaea* L., à Breazu, distr. Iaşi, 14. VI. 1946; conidies: 29-36 x 7,5-9 $\mu$..

52. **Melanconium stromaticum** Corda, Ic. fung. I. 3 (!); Allesch. in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VII. 573 (1903) c. icon.; Diedicke in Kr. Fl. Mark Brandenb. IX. 857 (1915); Oudem., Enum. Syst. Fung. II. 323 (1920); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 1. 563 (1921).

Sur les rameaux de *Carpinus Betulus* L., à Breazu, distr. Iaşi, 14;VI.1946; conidies: 12-17,5 x 7,5-9 $\mu$..

53. **Ramularia Gei-Allepici** Săvul. et Sandu in Hedwigia, LXXIII, 112 (1933).

Sur les feuilles de *Geum Allepicum* Jacq., à Rădăuţi, distr. Rădăuţi, 18.VI.1946; conidiophores: 18-30 x 3 $\mu$.; conidies: 9-18 x 3 $\mu$..

54. **Ramularia Taraxaci** Karst. in Hedwigia XXIII. 7 (1884);

Lindau in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VIII. 329 (1907); Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 1173 (1923); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 2. 189 (1934).

**Syn.:** *Cylindrospora Taraxaci* Schroet., Kr. Fl. Schles. II. 489 (1897).

Sur les feuilles de *Taraxacum officinale* Web., à Paşcani, distr. Baia, 15.VI.1946; conidiophores: 21-42 x 3 $\mu$.; conidies: 18-48 x 2-4,5 $\mu$. continues ou avec 1-3 cloisons transversales; à Suceava, distr. Suceava, 16.VI.1946; conidiophores: 21-33 x 3 $\mu$.; conidies. 15-55 x 3-4 $\mu$.; à Ilişeşti, distr. Suceava 16.VI.1946; conidiophores: 18-36x3$\mu$.; conidies: 15-42 x 3-4,5 $\mu$..

55. **Ovularia obliqua** (Cooke) Oudem. in Hedwigia, 85 (1883); Lindau in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VIII. 237 (1907); Oudem., Enum. Syst. Fung. II. 193 (1920); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 2. 73 (1934).

Sur les feuilles de *Rumex crispus* L., à Paşcani, distr. Baia, 18. VI. 1946; conidiophores: 45-120 x 3-4,5 $\mu$., conidies: 15-30 x 9-12 $\mu$..

56. **Ovularia decipiens** Sacc., Fungi ital. Tab. 973 (1881) et Syll. Fung. IV. 139 (1886); Lindau in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VIII, 240 (1907); Oudem. Enum. Syst. Fung. III. 150 (1921); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 2. 75 (1934).

Sur les feuilles de *Ranunculus acris* L., à Paşcani, distr. Baia, 15.VII.1946; conidiophores: 54-105 x 3 4,5 $\mu$; conidies: 18-26 x 9-12 $\mu$..

57. **Cladosporium herbarum** (Pers.) Kickx in Mag. Ges. Naturf. Fr. Berlin, VII. 37 (1816); Lindau in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. VIII. 800 (1907); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 2. 300 (1934).

**Syn.:** *Dematium herbarum* Pers., Tent. Disp. 75 (1797).

Sur les feuilles mortes de *Quercus lanuginosa* Lam., à Breazu, distr. Iaşi, 14.VI.1946; conidiophores: 80-130 x 6-9 $\mu$.; conidies: 12-21 x 6-7,5 $\mu$..

58. **Cercospora Armoraciae** Sacc., Nuovo Giorn. Bot. ital. VIII 288 (1876); Lindau in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. IX. 98 (1910); Oudem. Enum. Syst. Fung. III. 257 (1923); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III 4. 2. 338, Tab. CXLIII. fig. 3 (1934).

Sur les feuilles de *Cochlearia Armoracia* L., à Rădăuţi, distr. Rădăuţi, 18.VI.1956; conidiophores: 36-50 x 4,5-6 $\mu$.: conidies: 60-140 x 3-5 $\mu$..

59. **Napicladium arundinaceum** (Corda) Sacc., Syll. Fung. IV 482 (1886); Lindau in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. IX. 73 (1910) c. icon.;

Oudem., Enum., Syst. Fung. I. 811 (1919); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 2. 357. Tab. CXLI. fig. 8-9 (1934).

**Syn.:** *Helminthosporium arundinaceum* Corda, Ic. fung. III. 10 fig. 25 (1839).

Sur les feuilles de *Phragmites communis* L., à Dobrovăţ, distr. Vaslui, 1.IX.1945; conidiophores: 45-60 x 6-7,5 $\mu$.; conidies: 42-49 x 15-18 $\mu$..

60. **Exosporium Tiliae** Link in Mag. Ges. Naturf. Fr. Berlin, III 10. Tab. I. fig. 8 (1809); Lindau in Rabenh., Kr. Fl. Deutschl. IX. 638 (1910) c. icon.; Oudem., Enum. Syst. Fung. IV. 19 (1923); Migula, Kr. Fl. Deutschl. Pilze III. 4. 2. 645, Tab. CLXXI. fig. 8-10 (1934).

Sur les rameaux mortes de *Tilia europaea* L., à Bârnova, distr. Iaşi, 19.IX.1946; conidiophores: 24-36 x 9-12 $\mu$.; conidies: 42-75 x 15-18 $\mu$..

*Laboratoire de Pathologie végetale de l'Ecole Polytechnique de Jassy*

*(Reçu le 1 Décembre 1946)*

## COMPTES RENDUS DES LIVRES REÇUS

M. Piazzolla Beloch. – *Lezioni di Geometria Analitica con elementi di Geometria Proiettiva*. Vol. I. Bologna – La Grafolito – 1946 (Lithographié).

Les livres reçus de M-me Piazzolla Beloch nous ont fait un grand plaisir: ils sont parmi les premiers livres d'autres pays, qui sont arrivés après la guerre, à la bibliothèque du Séminaire Mathématique de l'Ecole Polytechnique „G. Asaky" de Jassy. La satisfaction est plus complète pour nous, voyant que les échanges d'idées avec l'Italie, dont la tradition mathématique a formé tant des mathématiciens roumains, sont reprises. Nous désirons que ces échanges se multiplient et qu'ils dépassent ceux d'avant la guerre.

Nous avons seulement le premier tome lithographié des Leçons de Géométrie Analytique avec éléments de Géométrie Projective de M-me Beloch.

L'Auteur, conservant la tradition des célèbres et classiques traités analogues d'Italie, où les premières notions de Géométrie métrique et de Géométrie projective sont exposées parallèlement, a apporté comme note personnelle une attention didactique jusqu'aux plus minutieuses questions, en combinant la clarté et la concision dans l'exposition, de telle manière qu'il donne une cristallisation parfaite du fond traité.

Nous trouvons aussi une originalité dans la division et la succession des chapitres. Nous remarquons encore la clarté et l'intuitivité des planches.

Les leçons de ce tome sont divisées en trois parties: l'introduction, la première partie où est traitée la Géométrie Analytique dans ses conceptions fondamentales et la deuxième partie: les birapports et les divers sousgroupes, qui se détachent du groupe projectif.

Dans l'introduction sont clarifiées méthodiquement les opérations fondamentales de projection et de section, les formes géométriques fondamentales et l'application des opérations fondamentales à ces formes géométriques. On définit aussi les éléments impropres et les opérations qui peuvent être éxecutées avec ces éléments, la loi de dualité dans l'espace, dans le plan et dans une étoile, avec des exemples des théo-

rèmes duals. Iei l'auteur a mis toute son attention pour que l'exposition soit la plus claire et la plus intuitive possible.

La première partie commence avec la théorie des vecteurs pour déduire d'elle les formules classiques sur les angles entre les directions de l'espace. On coutinue avec la définition des divers systèmes des coordonnées dans l'espace, dans le plan et sur la droite.

Les chapitres IV - VII traitent successivement par les méthodes analytiques le plan et la droite, avec tous les problèmes, soit métriques, soit projectifs, liés à ces formes.

Dans le chapitre VII on considère les coordonnées plückeriennes d'une droite contenue dans un plan et d'un plan dans l'espace avec des exemples illustrant le principe de dualité.

Le chapite VIII nous introduit dans le système des coordonnées projectives sur la droite, dans le plan et dans l'espace, en partant des coordonnées plückeriennes définies précédemment.

Le chapitre IX contient les éléments géométriques imaginairs et le chapitre X, les aires et les volumes.

Dans le chapitre XI sont exposées les transformations des coordonnées dans l'espace, en insistant sur la distinction des transformations destrorsum et sinistrorsum. Le chapitre XII est destiné aux courbes et aux surfaces. Après les généralitées et la classification des courbes du plan, des surfaces de l'espace et des courbes gauches (sans utiliser encore les équations de la tangente dans un point d'une courbe), on passe à la description des courbes du II-ème degré, définies comme lieux géométriques (le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole). On traite des courbes de degré supérieur: la cissoïde, la conchoïde et les courbes de Cassini. On donne des exemples de courbes transcendentes: sinussoïdes, cycloïdes epi- et hypocycloïdes, évolventes du cercle.

Aux surfaces, on déduit les équations pour les surfaces cylindriques, coniques, de rotation. On donne la forme paramétrique des équations d'une surface et comme exemple on traite les surfaces réglées. On passe ensuite à des exemples de surfaces algébriques: la sphère, le cône de révolution et le tore.

Dans la II-ème partie du tome sont exposés les principes de la Géométrie Projective et la classification des correspondances projectives.

Dans le I-er chapitre on traite des birapports, avec les constructions graphiques respectives, choisies parmi les plus simples et les plus intuitives.

Le chapitre II est consacré aux correspondances géométriques en général et en particulier aux correspondances projectives. On commence avec la perspectivité entre les formes de I-ère et II-ème espèce.

On passe à la définition de l'homographie dans la forme de I-ère espèce, on traite les cas de similitude et d'égalité et on donne les équations respectives. On définit l'involution et on établit son équation.

On traite les propriétés du quatreangle et du quadrilatère. On passe ensuite à la définition d'homographie (on collinéation) entre les formes de II-ème espèce. On définit la réciprocité (ou la corrélation). On traite successivement l'homographie et la réciprocité entre un plan et une étoile et entre deux étoiles. Comme cas particuliers de l'homographie, on présente l'affinité, la similitude et l'homologie entre les formes de II-ème espèce. On démontre le théorème de Desargues sur les triangles homologiques. On specifie les homologies harmoniques, affines les homothéties et les translations tirées de la définition générale.

Enfin sont exposées les projectivités entre les formes de III-ème espèce, avec les cas particuliers des affinitées et des homologies.

Nous espérons que les leçons de M-me Biazzolla Beloch de Géométrie Analytique avec ses éléments de Géométrie Projective seront en peu de temps, familières aux étudiants de la Faculté des Sciences et de l'Ecole Polytechnique de Jassy et aussi de toutes les écoles analogues de Roumanie.

Ils auront en ce livre un adjuvant très précieux dans l'étude de la Géométrie analytique et projective.

Les mathématiciens trouverons aussi dans le livre de M-me Beloch une nouvelle forme et un exposé distinct des problèmes classiques de Géométrie Analytique et de Géométrie Projective.

Prof. Dr. **ION CREANGĂ**

*Séminaire Mathématique*
*de l'Ecole Polytechnique*
*de Jassy*

* * *

Marg. Piazzolla Beloch. *Lezioni di Geometria Descrittiva*, vol. I. Bologna – La Grafolito – 1946 (Lithografié).

Ce volume, comprenant 172 pages et de nombreuses épures, représente une partie des leçons de Géométrie Descriptive proposées par M-me Piazzolla Beloch à l'Université italienne de Ferrare.

Soigneusement lithographié, les épures correctement exécutées, le volume fait une bonne impression.

L'auteur a partagé les leçons contenues dans ce premier volume en trois parties :

*L'introduction* (pag. 1-61). Dans cette partie on expose le but de la Géométrie Descriptive, après quoi on passe sommairement sur les systèmes de projection et on énonce les propriétés principales des courbes planes et gauches ainsi que les propriétés des surfaces du seconde ordre. On introduit après quelques notions utiles sur la géométrie projective. Le chapitre est terminé par une petite introduction dans la perspective linéaire.

*Première partie*: (pag. 62 - 72) traite le théorème de H a u c h, dont on fait l'application suivante :

*Etant données les projections d'une figure de l'espace, faites sur deux plans* $\pi_1$ *et* $\pi_2$ *de deux centres* $O_1$ *et* $O_2$, *trouver la projection de la même figure sur un troisième plan* $\pi_3$ *faite d'un troisième centre* $O_3$. Le problème est résolu par M-me B e l o c h en utilisant aussi bien l'esquisse intuitive que l'épure.

*La seconde partie*, qui est aussi la dernière de ce volume est réservée au système de projection de M o n g e traitant : le point, la droite, le plan Droites et plans parallèles. Intersections. Les méthodes des rabattements, rotations et changements des plans. Le chapitre est terminé par une application traitant le problème intéressant :

*Etant donnée une figure représentée par la projection de* M o n g e, *trouver la projection orthogonale, oblique ou centrale sur un plan donné.*

Ces leçons sont exposées d'une manière claire et méthodique. Les exemples choisis comme applications de la théorie sont suggestifs, ce qui rende compréhensible la Géométrie Descriptive même pour les esprits réfractaires.

Bref, l'auteur a réussi à mettre en évidence la valeur éducative de cette discipline qui est de voir dans l'espace.

Pourtant comme le volume n'est qu'une bonne introduction à l'étude de la Géométrie Descriptive, nous attendons la suite pour voir quelle est l'étendue de cette étude à l'Université de Ferrare et la manière dont elle est conçue par l'auteur.

Prof. Dr. **MIHAIL ŞT. BOTEZ**

*Séminaire Mathématique*
*de l'Ecole Polytechnique*
*de Jassy*

* * *

Charles Platrier. – *Initiation aux Mécaniques ondulatoires.* Préface de Louis de Broglie. (Actual. sci. industr. 984), Hermann & Cie, Paris (1945), 88 pag.

Les tendances modernes des Mathématiques à notre époque de rigueur et d'axiomatisation ont eu une repercution sensible sur les traités récents de Mécanique dite «rationnelle», contribuant essentiellement à une révision progressive d'un nombre de points obscurs et à la correction des longueurs, des insuffisances et même des imprécisions et des inexactitudes. Ces nombreux défauts d'exposition remontent en partie à l'époque moins exigeante des origines de la Mécanique analytique, mais la majeure partie d'entre eux viennent surtout – selon une expression suggestive de M. M. Brelot (Voir: *Sur les principes mathématiques de la Mécanique classique.* Annales de l'Univ. de Grenoble, XIX (1943), tirage à part, pag. 1) – „d'une défaut de séparation entre une structure mathématique bien choisie et le point de vue physique". C'est précisément pour éviter une telle séparation qu'on se propose de reprendre la construction prometteuse de rigueur et de généralité de la Mécanique rationnelle par l'introduction de l'utilisation systématique et explicite des fonctions vectorielles additives d'ensemble et de l'instrument si parfaitement adopté pour serrer de plus près la réalité physique qu'est l'intégrale de Stieltjes.

Ce point de vue qui suppose un élargissement accentué des programmes de Mathématiques pures et appliquées, surtout dans les établissements de haute culture technique est soutenu dès aujourd'hui de plus en plus vigoureusement par les savants et hommes de sciences responsables et autorisés dans les pays les plus avancés du monde (Voir, par exemple, C. R. Young, *The education of engineers.* Revue Trimestrielle Canadienne, vol. 32 (1946), pag. 75 – 83).

C'est précisément de ce point de vue de l'élargissement des programmes des écoles polytechniques que M. Ch. Platrier passe à une modernisation du cours de Mécanique théorique en y englobant aussi la Mécanique ondulatoire.

Nous saluons avec enthousiasme l'introduction dans l'enseignement de cette nouvelle branche de la Mécanique, introduction justifiée par son importance intrinsèque, par l'étendue des applications extrêmement fécondes qu'elle a reçues dans l'étude de tous les phénomènes de l'echelle atomique et les conceptions générales d'un si haut intérêt philosophique qu'elle a suggéré aux physiciens contemporains.

Dans les cinq chapitres de ce livre M. Platrier, ayant pour but de permettre aux élèves: d'une part la compréhension des chapitres du cours de physique qui utilisent la mécanique ondulatoire, d'autre part

celle d'ouvrages spéciaux de physique mathématique moderne, a reussi à donner une vue cristalline d'ensemble de la nouvelle Mécanique et si brève que „l'on est surpris de voir toutes les questions essentielles traités en un si petit nombre de pages",

Après avoir exposé les méthodes mathématiques nécessaires pour la compréhension du cours, telles que le calcul des matrices et celui des opérateurs, l'auteur passe à l'exposition de la mécanique ondulatoire primitive de L. de Broglie et du point de vue de base de la physique quantique de Heisenberg, la première fusionnant la théorie de l'émission et la théorie des ondulations, la seconde substituant les observations spectroscopiques directes aux déductions des mécaniques classiques, en nous montrant ensuite comment il se rejoignent et se complètent. Les chapitres III et IV exposent la mécanique ondulatoire de Schrödinger, transformée de la mécanique newtonienne et de la relativité restreinte, de sorte qu'on parvient à énoncer les principes et théorèmes généraux de la nouvelle mécanique et les principaux problèmes de la quantification. Enfin, dans un dernier chapitre, l'auteur expose la théorie de Dirac, c'est à dire la mécanique ondulatoire à plusieures fonctions d'onde, l'un des derniers progrès essentiels de cette science moderne.

En terminant, je ne puis que m'associer à la très favorable et bien méritoire appréciation donnée sur ce livre de M. Platrier dans la Préface si brillante écrite par M. Louis de Broglie:

„Il n'était assurément pas possible dans un ouvrage de ce genre d'aborder l'étude de toutes les branches devenues nombreuses et complexes d'une science nouvelle en plein essor. Mais M. Platrier a pleinement atteint son but qui était d'attirer l'attention des élèves sur l'intérêt de la Mécanique ondulatoire et de leur exposer succinctement les grandes lignes. On doit le remercier d'avoir écrit ce petit livre clair et précis qui instruira tous les lecteurs et attirera peut être la curiosité naissante de quelques futurs chercheurs".

* * *

Charles Platrier. *Cours de Mécanique des milieux continus déformables.* Théorie de l'élasticité isothermique. Ed.: Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris. 1944 – 1945 (Lithographié).

Persuadé que le rôle de l'enseignement défini par une haute conscience scientifique et morale est celle de „rattacher les notions utilisés dans les cours techniques à des principes aussi solides et aussi généraux que possible", M. Ch. Platrier, à qui l'on doit déjà de

nombreux et remarquables travaux et exposés sur les diverses branches de la Mécanique théorique et appliquée, recensés si favorablement par la critique internationale (voir: *Les axiomes da la mécanique newtonienne* (Exposés de mécanique newtonienne. Cours de l'école polytechnique. Nr. 1). Actual. sci. industr. 427, 58 pag. Paris, Hermann & Cie, 1936; Cinématique du solide et théorie des vecteurs. 51 pag.; La masse en cinématique et théorie des tenseurs du second ordre. 81 pag.; Cinématique des milieux continus (Exposés de géométrie cinématique, 34 pag.: I, II, III). Actual. sci. industr. 325-327., recensés: par MM. Pöschl et Hamel dans le vol. $62_1$ du *„Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik"* (1936), pag. 911 et 913-914; par MM. Fenchel et Prager dans le *„Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete"*, vol. 14 (1936), pag. 137-138 et le *„Zentralblatt für Mechanik"*, vol. 4 pag. 337 (1936)), nous présente la Mécanique des milieux continus déformables, servant à son enseignement, au cours de ces vingt dernières années, à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées de Paris.

Nous ne pouvons que féliciter l'auteur qui a eu l'heureuse idée de faire bénéficier le public scientifique de cet exposé contenant entre autres nombre de résultats de ses travaux personnels déjà partiellement publiés dans la presse scientifique et dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris ou de congrès internationaux. (voir. C. R. Acad. Sci., Paris, 202 (1936), pag. 1650-1652 et 1906-1908 et 203, pag. 36-38 et Proc. V intern. Congr. appl. Mech. 1938, Cambridge, Mass., pag. 102-106).

En suivant la remarque qui termine le mémoire fondamental de Ricci et Levi-Civita «*Méthodes de calcul différentiel absolu et leur applications*» paru en 1901 dans les «Mathematische Annalen» (Vol. 54, pag. 201): «Nous ne pouvons passer sous silence, disent-ils en terminant, que la théorie de l'élasticité est peut être une de celles où les méthodes de calcul différentiel absolu sont appelées à rendre les meilleurs services», M. Platrier commence par résumer, dans une introduction, les méthodes mathématiques du calcul matriciel et tensoriel qu'il considère indispensables à la compréhension des théories modernes des physiques relativistes et ondulatoires et dont il se propose l'utilisation dans la théorie de l'élasticité isothermique.

Après l'établissement, dans le livre I, des résultats de la cinématique des milieux continus déformables et des généralités sur les tensions, l'auteur passe successivement, dans les trois livres suivants, à l'exposition des notions sur la Mécanique des courbes et des surfaces matérielles continues déformables; à la cristallisation des conditions

mécaniques nécessaires à l'équilibre et au mouvement et à la Mécanique des milieux classiques (élastiques, homogènes, isotropes) à trois dimensions. Dans les livres V à VII l'auteur établit les principes de la statique de la théorie de l'élasticité isothermique en se fermant sur divers extensions du problème de Barré de Saint-Venant; passe ensuite à la dynamique de la théorie de l'élasticité isothermique pour aboutir enfin jusqu'au premier chapitre de la résistance des matériaux.

En s'acquittant avec un plein succès de la tâche qu'il s'était lui-même proposée, M. Platrier est parvenu, en effet, à donner, une excellente vue d'ensemble sur la partie de la Mécanique des milieux continus déformables qui est celle de l'élasticité isothermique, en faisant emploi, avec un certain systématisme, du calcul absolu qui a le mérite essentiel de mettre sous une forme condensée et féconde les vérités géométriques et mécaniques.

Aujourd'hui, quand les tenants même de la spécialisation se tournent vers la formule, parfaitement justifiée du point de vue scientifique, d'une solide et assez générale préparation théorique et de caractère des jeunes ingénieurs (Voir, par exemple, les belles et très instructives pages de M. H. Gaudefroy, «*Orientation vers la carrière de l'ingénieur*». Revue Trimestrielle Canadienne, vol. 31, Montréal, Hiver 1945, pag. 353-384), et quand les statistiques des meilleurs Instituts Polytechniques du monde entier montrent que d'au moins 40 % du nombre total d'heures consacrées à l'étude des sciences fondamentales dans ces instituts est accordé aux sciences mathématiques, dont l'importance est reconnue par conséquent dans tous les milieux universitaires et professionnels, nous ne pouvons, que saluer d'une façon la plus vive cette oeuvre de M. Platrier qui instruira tous ses lecteurs et contribuera, nous le souhaitons bien, à vaincre, là où elles existent encore, les dernières résitances de ceux qui s'opposent à reconnaître la nécessité d'augmenter le nombre des chaires et le programme d'enseignement des mathématiques dans les établissements de haute culture technique.

* * *

Ch. Platrier. – *Initiation aux Mécaniques Relativistes*. Ed.: Ec. Polyt., Paris (1944), 85 pag. (Lithographié).

La théorie de la relativité fut la première des doctrines modernes qui se constitua sur des bases fondamentalement contrastantes avec celles de la physique classique, et par conséquent avec celles de l'ordinaire théorie de la connaissance. Aujourd'hui, après quarante ans de

son avènement, lorsqu'on constate que «la vrai, la profonde essence de la relativité einsteinienne est restée intacte, comme celle d'une saine doctrine rigoureusement constituée en se basant sur le critérium et la méthode expérimentale de Galilée» (Voir l'article de M. P. Straneo. – La teoria della Relatività a quarant'anni dal suo avvento. Scientia, Vol. LXXX, Luglio-Agosto 1946, pag. 8-18), on doit saluer bien chaleureusement chaque nouvelle exposition scientifique ou didactique de cette théorie.

M. Platrier qui a commencé à enseigner depuis 1925, à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées de Paris, la relativité restreinte et généralisée, a déjà donné une exposition de cette théorie dans la 4-ième partie du cours de Mécanique, publié en 1929 en collaboration de P. Painlevé (voir: P. Painlevé, Ch. Platrier. – Cours de Mécanique. Mécanique des solides indéformables. Théorie des machines et de l'aviation. Les Mécaniques de Newton et d'Einstein. VIII + 644 pag., 159 fig. Paris, Gauthier-Villars, 1929 (Cours de l'Ecole Polytechnique)). Il nous présente maintenant une suggestive et bien agréable à lire „Initiation aux mécaniques relativistes". Dans les trois premiers chapitres de cette oeuvre on trouve le développement du calcul matriciel et tensoriel dans un univers quelconque à $n$ dimensions. Les autres chapitres (4 à 7) comprennent respectivement l'exposition des théories concernant les univers de Lorentz-Minkowski, la relativité restreinte, la relativité généralisée et l'univers de Schwarzschild.

Nous souhaitons bien de pouvoir saluer le plus tôt possible la parution imprimée des deux volumes lithographiés de M. Platrier dont nous avons eu le plaisir le plus exquis de faire le compte rendu dans les pages ci-dessus.

Prof. Dr. **D. I. MANGERON**
*Séminaire Mathématique*
*de l'Ecole Polytechnique*
*de Jassy*

* * *

V. Rubbo, – Incaricato de Costruzione di Macchine (Motori) nel Politecnico di Milano : *Progetti di Turbine a Vapore*, Istituto Editoriale Cisalpino, Milano-Varese, 1946, 236 pages, 123 figures dans le texte et 26 planches.

Dans le I-er chap. l'auteur commence l'exposition par quelques indications introductives d'orientation, nécessaires au développement

général d'un projet de turbine à vapeur, comme sont par ex. éclaircissement des notions de puissance, de pression et de température des vapeurs à l'admission, leur pression et leur température à l'évacuation puis la détermination des caractéristiques et des dimensions principales, le calcul des différents couples, les turbines à contre-pression et à étages de pression, l'effort exial, etc.

Le II-a chap. comprend 4 exemples de calcul thermodynamique de chaque élément à part les turbines à vapeur.

Dans les chap. III-VI, on traite des projets complets de turbines comme il suit : le projet d'une turbine à contre-pression à petite puissance, celui d'une turbine à condensation du type de celles à action, le projet d'une turbine mixte à condensation, à étages de pression et à charge variable et le projet d'une turbine à condensation à grande puissance.

Enfin dans le VII-e chap., on donne des indications sur les normes à observer pour la mise en fonction d'un côté, et pour l'opération de réception de l'autre, des turbines à vapeur de condensation. L'opération de réception est illustrée par un exemple pratique concernant une turbine à condensation de 3500 KW.

Le traité est écrit pour les étudiants ingénieurs électromécaniciens, mais il peut être utilisé aussi avec le plus grand profit par les ingénieurs et les techniciens occupés à la construction et à la surveillance des turbines à vapeur. Les exemples de calculs des projets traités se réfèrent aux types fondamentaux des turbines à vapeur. Il faut remarquer que chaque exemple est développé indépendamment des autres, ce qui entraine certaines répétitions de thèses et de raisonnements. Loin d'être un défaut, cela constitue plutôt une utilité didactique dans le traitement de telles matières. Dans quelques cas on mentionne seulement les omissions, que les étudiants peuvent se rappeler facilement.

En tenant compte de la manière dont est faite l'exposition, dont on a choisi les exemples traités, et en tenant compte aussi de la rigueur technique observée, le livre se recommande par lui-même et contribue beaucoup à compléter un manque qu'on a beaucoup ressenti dans cette branche de la technique.

* * *

V. Rubbo - M. Speluzzi. - *Lezioni di Costruzione dei Motori Termici e Idraulici*, Istituto Editoriale Cisalpino, Milano-Varese, 1946, 658 pages et 127 figures dans le texte.

La matière est traitée en 5 parties.

*La I-ère partie* comprend les turbines hydrauliques. En partant de l'énergie emmagasinée dans une masse d'eau, du théorème de Bernoulli, de la formule de Torricelli et du principe de l'action et de la réaction, dans le I-er chap., on fait une classification des turbines hydrauliques, on définit le degré de réaction, on rappelle les types modernes de turbines, on donne des rélations fondamentales pour le calcul des turbines hydrauliques et on établit : la puissance, le rendement, le nombre de tours, etc. Dans le II-e chap. on décrit les caractéristiques principales, l'installation et la fonctionnement de la turbine Kaplan. Les chap. III et IV traitent des dimensionnements des conduites (distributeurs, roue, etc.), et de la construction des turbines à réaction (turbines Francis, Kaplan et à hélice). Dans le V-e chap. on parle de la turbine Pelton et dans le VI-e chap. de l'usure des turbines hydrauliques à la suite des effets d'érosion, de corrosion et de perforation. Enfin, dans le VII-e chap. on parle des accessoires des turbines (évacuation, soupapes, graissage et supports) et dans le VIII-e chap. du choix et de l'installation des turbines hydrauliques.

*La II-e partie* du livre traite du réglage des turbines hydrauliques, types de régulateurs, degré d'insensibilité et d'irrégularité, réglage indirect, distributeurs, alimentation à l'huile, courbe de régime, cycles de Leauté, temps de démarrage etc.

Dans *la III-e partie* on décrit les turbines à vapeur. Après les notions générales introductives du I-er chap. qui comprend les principes de fonctionnement de ce genre de turbines, le diagramme Mollier et son application aux turbines à vapeur, dans le II-e chap. on fait une classification générale des différents types de turbine à vapeur turbines à action, roue Courtis, turbines à réaction, turbines Parson, turbines radiales) et on y discute aussi l'efficacité de la condensation, les différentes pertes d'énergie et les valeurs pratiques de la vitesse périphérique. Dans le III-e chap. sont présentés les calculs fondamentaux concernant les différentes grandeurs comme par ex. le calcul des rendements, des angles pratiques, du coefficient de qualité etc. Dans le IV-e chap. sont exposés les différents problèmes en relation intime avec le fonctionnement des turbines, comme par ex. : indications concernant le réglage, action des vapeurs saturées humides, différents examens et aussi le problème de graissage. Le V-e chap. s'occupe des problèmes concernant la construction et le calcul des divers organes, comme : palettes, distributeurs spéciaux, tambours rotatifs, carcasses, arbres, etc.

Dans *la IV-e partie* on traite les différents types de condensateurs, le degré du vide, la stabilité de leur fonctionnement, le calcul des

surfaces (de condensation), les différentes pertes et les pompes qu'on utilise.

Enfin, dans *la V=e partie* on parle des moteurs à combustion interne. Dans les 19 chap. de cette partie, on discute successivement de: combustibles, cycles théoriques (Lenoir, Beau de Roches en 4 et 2 temps), cycles pratiques avec leurs déformations, rendements, diagrammes cycliques, critères de classification des moteurs à combustion interne, le profil des cames et les organes de distribution, mise en fonctionnement, puissance des moteurs et calcul de la charge, courbes caractéristiques, alimentation, refroidissement, graissage, réglage et aussi opérations en relation avec la réception des moteurs.

Bien que la matière traitée soit vaste, les auteurs se sont appliqués et ont pleinement réussi, à exposer d'une manière aussi complète et concise que possible, tous les problèmes importants, dans un style léger, adéquat aux critères et aux découvertes les plus modernes. Les déductions compliquées théoriques sont remplacées presque partout par des faits expérimentaux, sans que pour cela le livre perde de son niveau élevé.

D'après son contenu, le livre est non seulement de la plus grande utilité pour les étudiants électromécaniciens, mais il est aussi très utile pour tout ingénieur ou technicien, non seulement pour les spécialistes, mais aussi pour ceux qui désirent s'approprier une culture technique générale.

Prof. Dr. **T. I. CÂMPAN**

*Laboratoire d'Electricité et*
*Laboratoire de Thermotechnique*
*de l'Ecole Polytechnique de Jassy*

# Sommaire

du Tome I, fasc. 2. (Juillet à Décembre 1946)


| | | Page |
|---|---|---|
| *Al. C. Climescu*<br>(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur l'équation fonctionnelle de l'associativité | 211 |
| *Gh. Gheorghiev*<br>(Dr., Chargé de cours à l'Univ. Jassy) | Sur certaines courbes dérivées d'une courbe gauche et applications | 225 |
| *Mihail St. Botez*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur une surface cerclée particulière | 234 |
| *Adolf Haimovici*<br>(Dr., Chef de travaux à l'Univ. Jassy) | Sur une certaine déformation des congruences de sphères | 238 |
| *Miron Nicolesco*<br>(Dr., Prof. à l'Univ. Bucarest) | Remarque sur le potentiel newtonien | 256 |
| *Al. C. Climescu*<br>(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur les espaces à topologie transitive d'ordre n. | 259 |
| *A. Myller*<br>(Dr., Prof. à l'Univ. Jassy) | Equations itérales linéaires du second ordre à coefficients constants | 270 |
| *O. Mayer*<br>(Dr., Prof. à l'Univ. Iassy) | Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions de variable complexe | 274 |
| *Gaetano Fichera*<br>(Dr. Prof. à l'Inst. appl. calcul. Rome) | Sul problèma di *Dini-Neumann* nel piano | 281 |
| *C. P. Bogdan*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Univ. Jassy) | Sur l'enveloppe des familles planes de coniques | 289 |
| *C. P. Bogdan*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Univ. Jassy) | Sur les familles de coniques de l'espace ordinaire | 292 |
| *D. I. Mangeron*<br>(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur | 295 |
| *D. I. Mangeron*<br>(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Notes de mécanique rationnelle. Remarques sur le problème généralisant celui de la cloche et son battant | 304 |
| *Ion Irimescu*<br>(Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy) | Calculs topographiques à la machine de calcul sans levier | 309 |
| *Virgiliu G. Gheorghiu &*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | | |
| *Nicolae Calinicenco*<br>(Dr., Chef de travaux à l'Univ. Jassy) | Sur les correlations entre le PH, la salininité et la concentration de l'oxigène dissout dans l'eau de la mer noir | 314 |

Page

*I. N. Ciochină* (Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) — Sur la variation du volume des éléments participants dans une réaction chimique 325

*I. Ciochină &* (Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)
*C. Calistru* (Ing., Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy) — Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique 334

*Emil Boldur* (Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Timişoara) — Dentologie du lièvre 344

*Cesar Parteni Antoni &* (Ing. Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)
*N. V. Botan* (Ing., Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy) — La théorie du quadripôle appliquée au moteur d'induction en cascade avec un compensateur de phase 352

*Şt. Popesco* (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) — Sur l'amélioration des courges. Recherches et méthodes 363

*C. Sandu-Ville* (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) — Contribution à la connaissance des Micromycètes de Moldavie 384

**COMPTES RENDUS DES LIVRES REÇUS** 397

*M. Piazzolla Beloch.* – Lezioni de Geometria Analitica con elementi di Geometria Proiettiva. Vol I, Bologna (1946) (Lithographié) (Prof. Dr. I. Creangă) ;

*M. Piazzolla Beloch* – Lezioni di Geometria descrittiva. Vol. I, Bologna (1946) (Lithographié) (Prof Dr. Mihail Şt. Botez) ;

*Charles Platrier.* – Initiation aux Mécaniques ondulatoires. Paris (1945). Act. sci. & industr. (Prof. Dr. D. I. Mangeron) ;

*Charles Platrier.* – Cours de Mécanique des milieux continus déformables. Théorie de l'élasticité isothermique. Paris (1944–1945) (Lithographié) (Prof. Dr. D. I. Mangeron) ;

*Charles Platrier.* – Initiation aux Mécaniques relativistes. Paris (1944) (Lithographié) (Prof. Dr. D. I. Mangeron) ;

*V. Rubbo.* – Progetti di Turbine a Vapore. Milano-Varese (1946) (Prof. Dr. T. I. Câmpan);

*V. Rubbo & M. Speluzzi.* – Lezioni di Costruzione dei Motori Termici e Idraulici. Milano-Varese. (1946), (Prof. Dr. T. I. Câmpan).

## REVUES SCIENTIFIQUES SOUS PRESSE PUBLIÉES A JASSY

par :

### A. L'Ecole Polytechnique de Jassy :

1. **„Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy"**, Tome II, fasc. 1 (Janvier à Juin 1947) ;
2. **„Satul de mâine"**, Tome I, Fasc. 2 (Février 1947) ;

### B. La Faculté des Sciences de l'Université de Jassy :

3. **„Annales Scientifiques de l'Université de Jassy"**, Tome. XXX; Section I & Section II ;
4. **„Revista ştiinţifică «V. Adamachi»"**, Tome XXXIII, Nr.1 (1947);

### C. La Faculté de Médecine de l'Université de Jassy et les organismes scientifiques affiliés :

5. **„Revue Médico-chirurgicale"**. Bulletin de la Société des médecins et des naturalistes de Jassy, Tome LVIII, Nr. 1-2 (1947) ;
6. **Bulletin de la Société Roumaine de Neurologie, Psychiatrie, Psychologie et Endocrinologie"**, Tome XXVIII (1947) :

### D. La Faculté des Lettres de l'Université de Jassy et les organismes scientifiques affiliés :

7. **„Buletinul Institutului de Filologie Română «Alexandru Philippide»"**, Vol. XI ;
8. **„Studii şi Cercetări Istorice"**. Institutul de Istorie Naţională «A. D. Xenopol», Vol. XX (Vol. III, Nouvelle Série) ;
9. **„Ethos"** Revistă de teorie a culturii. Anul IV, Nr. 1-2 (1947).

# Sommaire

## du Tome I, fasc. 2. (Juillet à Décembre 1946)


| | | Page |
|---|---|---|
| *Al. C. Climescu*<br>(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur l'équation fonctionnelle de l'associativité | 211 |
| *Gh. Gheorghiev*<br>(Dr., Chargé de cours à l'Univ. Jassy) | Sur certaines courbes dérivées d'une courbe gauche et applications | 225 |
| *Mihail St. Botez*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur une surface cerclée particulière | 234 |
| *Adolf Haimovici*<br>(Dr., Chef de travaux à l'Univ. Jassy) | Sur une certaine déformation des congruences de sphères | 238 |
| *Miron Nicolesco*<br>(Dr., Prof. à l'Univ. Bucarest) | Remarque sur le potentiel newtonien | 256 |
| *Al. C. Climescu*<br>(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur les espaces à topologie transitive d'ordre n. | 259 |
| *A. Myller*<br>(Dr., Prof. à l'Univ. Jassy) | Equations itérales linéaires du second ordre à coefficients constants | 270 |
| *O. Mayer*<br>(Dr., Prof. à l'Univ. Jassy) | Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions de variable complexe | 274 |
| *Gaetano Fichera*<br>(Dr. Prof. à l'Inst. appl. calcul. Rome) | Sul problema di *Dini-Neumann* nel piano | 281 |
| *C. P. Bogdan*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Univ. Jassy) | Sur l'enveloppe des familles planes de coniques | 289 |
| *C. P. Bogdan*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Univ. Jassy) | Sur les familles de coniques de l'espace ordinaire | 292 |
| *D. I. Mangeron*<br>(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur | 295 |
| *D. I. Mangeron*<br>(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Notes de mécanique rationnelle. Remarques sur le problème généralisant celui de la cloche et son battant | 304 |
| *Ion Irimescu*<br>(Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy) | Calculs topographiques à la machine de calcul sans levier | 309 |
| *Virgiliu G. Gheorghiu &*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)<br>*Nicolae Calinicenco*<br>(Dr., Chef de travaux à l'Univ. Jassy) | Sur les correlations entre le $P_H$, la salininité et la concentration de l'oxigène dissout dans l'eau de la mer noir | 314 |
| *I. N. Ciochină*<br>(Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)<br>*I. Ciochină &*<br>(Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)<br>*C. Calistru*<br>(Ing., Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur la variation du volume des éléments participants dans une réaction chimique | 325 |
| *Emil Boldur*<br>(Dr., Maître de conf. à l'Ec. Polyt. Timişoara) | Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique | 334 |
| *Cesar Parteni Antoni &*<br>(Ing. Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)<br>*N. V. Bofan*<br>(Ing., Assistant à l'Ec. Polyt. Jassy) | Dentologie du lièvre | 344 |
| *St. Popesco*<br>(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | La théorie du quadripôle appliquée au moteur d'induction en cascade avec un compensateur de phase | 352 |
| *C. Sandu-Ville*<br>(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy) | Sur l'amélioration des courges. Recherches et méthodes | 363 |
| | Contribution à la connaissance des Micromycètes de Moldavie | 384 |